

## ACOUSTIC IMPEDANCE MEASUREMENT USING A RESONANCE METHOD

by M. A. FERRERO and G. G. SACERDOTE

Istituto Elettrotecnico Nazionale, Torino, Italy

### Summary

The method of C. M. HARRIS for acoustic impedance measurements, wherein a system is brought to resonance, is theoretically discussed and extended. Some experimental results obtained with equipment applying the method are also reported.

### Sommaire

On expose les bases théoriques et le mode d'emploi de la méthode de mesure des impédances acoustiques, de C. M. HARRIS, dans laquelle un système est amené à la résonance. On donne aussi quelques résultats expérimentaux obtenus avec le dispositif d'application de cette méthode.

### Zusammenfassung

Es wird ein von C. M. HARRIS entwickeltes Resonanz-Verfahren zur Messung von akustischen Impedanzen beschrieben und seine theoretischen Grundlagen werden untersucht. Einige mit der beschriebenen Vorrichtung erzielte Versuchsergebnisse werden wiedergegeben.

### Riassunto

Si descrive il metodo per la misura d'impedenze acustiche, dovuto a C. M. HARRIS, che si attua portando un sistema in risonanza. Se ne esamina il comportamento teorico. Si riferiscono alcuni dati sperimentali ottenuti col dispositivo descritto.

1. An interesting method for measuring the acoustic impedance of porous screens has been described by HARRIS [1]. This method is based on the measurement of resonance in plane waves. Fig. 1 shows the experimental equipment: the porous screen under examination is fixed between the two halves of a tube, at the same distance from the mobile pistons. The total length of the

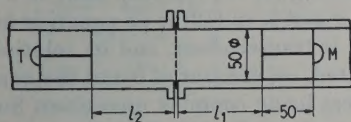


Fig. 1. Experimental equipment.

tube is  $2l$ : the source of sound and the microphone are connected to the pistons through narrow holes with high acoustic impedance. The measurement takes place as follows: first the resonance frequency  $f_0$  and the decay constant  $k_0$  of the bare chamber are measured without any porous screen; then the same data are measured when the porous screen is mounted in the tube, to obtain a new resonant frequency  $f$  and a new decay constant  $k$ . During the second determination the

position of the two pistons is not varied. The determination of the resonance frequency is obtained by varying the frequency of the source of sound until a maximum of response is obtained at the receiver. The decay factor is obtained by plotting on a graph the whole resonance curve.

2. First a general mathematical analysis will be developed. The system can be represented (Fig. 2) as an acoustic quadrupole (the specimen) connected at the input and at the output to two tubes of length  $l_1$  and  $l_2$  respectively, which are closed at their distant ends.

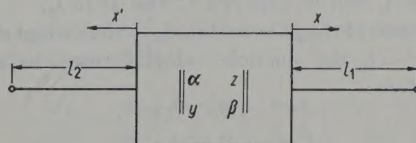


Fig. 2. Acoustic quadrupole.

The sample quadrupole inserted between the two tubes is determined by the following equations:

$$\begin{aligned} P_1(0) &= \alpha P_2(0) + z V_2(0), \\ -V_1(0) &= \gamma P_2(0) + \beta V_2(0) \end{aligned} \quad (1)$$

where  $P$  and  $V$  are the pressure and the particle velocity respectively (the index 1 indicating the input of the quadrupole, 2 the output).

Between the parameters of the quadrupole the relation is:

$$\alpha\beta - z\gamma = 1. \quad (2)$$

The propagation of acoustic waves along the tube involves losses:  $r$  is a dissipative specific resistance in series per unit of length and  $g$  is a specific conductance per unit of length.

The equations of propagation of sound waves along a tube are:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 p}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 p}{\partial t^2} + \left(g\varrho + \frac{r}{\varrho c^2}\right) \frac{\partial p}{\partial t} + grp, \\ \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} &= \frac{1}{c^2} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} + \left(g\varrho + \frac{r}{\varrho c^2}\right) \frac{\partial v}{\partial t} + grv \end{aligned} \quad (3)$$

where  $p$  is the instantaneous pressure and  $v$  the instantaneous particle velocity.

If

$$p = P(x) e^{\theta t},$$

we have:

$$P'' = \left[ \frac{\theta^2}{c^2} + \left(g\varrho + \frac{r}{\varrho c^2}\right)\theta + gr \right] P = \sigma^2 P \quad (4)$$

where

$$\sigma^2 = \frac{\theta^2}{c^2} + \left(g\varrho + \frac{r}{\varrho c^2}\right)\theta + gr = (r + \varrho\theta)\left(g + \frac{\theta}{\varrho c^2}\right).$$

The solution of this system of equations, adapted to our particular case, is known to be:

$$P = \sqrt{\frac{r + \varrho\theta}{g + (\theta/\varrho c^2)}} (-A e^{\sigma x} + B e^{-\sigma x}), \quad (6)$$

$$V = A e^{\sigma x} + B e^{-\sigma x}$$

where  $A$  and  $B$  are determined from the boundary conditions. The equation (6) holds for both tubes  $l_1$  and  $l_2$  (Fig. 2). For the tube  $l_2$ , however, a separate space co-ordinate  $x'$  will be used (instead of  $x$ ), whereas the coefficients  $A$  and  $B$  of tube  $l_1$  will be labelled  $C$  and  $D$  in  $l_2$ .

The end of the tube is closed, so that when  $x = l_1$  and  $x' = l_2$  the particle velocity must be zero. Therefore:

$$\begin{aligned} A e^{\sigma l_1} + B e^{-\sigma l_1} &= 0, \\ C e^{\sigma l_2} + D e^{-\sigma l_2} &= 0. \end{aligned} \quad (7)$$

If we put

$$H(\theta) = \varrho c \sqrt{\frac{\theta + (r/\varrho)}{\theta + g\varrho c^2}} \quad (8)$$

(where  $H(\theta)$  is a specific acoustic impedance), we have, for  $x=0$  and  $x'=0$ :

$$\begin{aligned} P_1(0) &= H(\theta)(B-A), \\ V_1(0) &= B+A, \\ P_2(0) &= H(\theta)(D-C), \\ V_2(0) &= D+C. \end{aligned} \quad (9)$$

Substituting these values in Eq. (1) of the quadrupole we obtain two more relations between the various parameters:

$$\begin{aligned} -H(\theta)(B-A) + \alpha H(\theta)(D-C) + z(D+C) &= 0, \\ B+A + \gamma H(\theta)(D-C) + \beta(D+C) &= 0. \end{aligned} \quad (10)$$

The characteristic frequencies and the decay constants can be obtained from the set of equations (7) and (10). These four equations are linear and homogeneous in the four unknown parameters  $A$ ,  $B$ ,  $C$  and  $D$ . The condition of compatibility requires, then, that the determinant of the coefficients of the equations be zero, so yielding a complex equation in  $\sigma$ ,  $\theta$  and the quadrupole coefficients, from which the characteristic frequencies and decay constants can be calculated as a function of the quadrupole coefficients, or the quadrupole coefficients from the measured characteristic frequencies and decay constants.

Thus

$$\begin{vmatrix} e^{\sigma l_1} & e^{-\sigma l_1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{\sigma l_2} & e^{-\sigma l_2} \\ H(\theta) & -H(\theta) & z - \alpha H(\theta) & z + \alpha H(\theta) \\ 1 & 1 & \beta - \gamma H(\theta) & \beta + \gamma H(\theta) \end{vmatrix} = 0 \quad (11)$$

that is

$$\begin{aligned} 0 &= \gamma H^2(\theta) \cosh \sigma l_1 \cosh \sigma l_2 + \\ &+ [\alpha \sinh \sigma l_1 \cosh \sigma l_2 + \beta \cosh \sigma l_1 \sinh \sigma l_2] H(\theta) + \\ &+ z \sinh \sigma l_1 \sinh \sigma l_2. \end{aligned} \quad (12)$$

Remembering (5) we see that there is a relation between  $\sigma$  and  $\theta$ , so (12) is an equation in  $\sigma$ . This equation is transcendental, and its solution rather complicated, on account of  $\sigma$  and the quadrupole parameters being complex quantities. Supposing however we have found  $\sigma$  from Eq. (12) we could proceed by calculating  $\theta$  from Eq. (5), and, since

$$\theta = -k + j\omega \quad (13)$$

the decay constant  $k$  and the resonance pulsance  $\omega$  are thus found.

This would be the sequence of computation if all parameters of the tube and the screen quadrupole were known. The set-up is used, however, for measuring the screen parameters.  $k$  and  $\omega$  are quantities that are measured directly by experiment. Eq. (12) should, therefore, be used for computing the parameters of the screen quadrupole.



3. The equation (12) is as general as possible: some approximations will now be analysed to obtain easier numerical computations.

When the tube diameter is reasonably wide and the walls are sufficiently rigid, it is possible to suppose  $g=0$  and  $r$  very small. We then have

$$H(\theta) = \sqrt{\left(\frac{r + \varrho\theta}{\theta}\right) \varrho c^2} \\ = \varrho c \sqrt{1 + \frac{r}{\varrho\theta}} \approx \varrho c \left(1 + \frac{r}{2\varrho\theta}\right), \quad (14)$$

$$\sigma = \frac{\theta}{c} \sqrt{1 + \frac{r}{\varrho\theta}} \approx \frac{\theta}{c} \left(1 + \frac{r}{2\varrho\theta}\right). \quad (15)$$

$H(\theta)$  and  $\sigma$  are therefore functions of the unknown quantities  $r$  and  $c$ . Approximate numerical values for  $r$  and  $c$  are to be found in the literature. They can be measured, however, with our set-up, namely by carrying out a measurement without a screen present. Then

$$\alpha = \beta = 1, \quad z = y = 0 \quad (16)$$

and putting  $l_1 + l_2 = 2l$ , equation (12) yields simply:

$$H(\theta) \sinh 2\sigma_0 l = 0. \quad (17)$$

Since  $H(\theta)$  is finite,  $\sinh 2\sigma_0 l$  should be zero, which occurs for the first time when  $2\sigma_0 l = j\pi$ . Substituting this in the complex Eq. (15), bearing in mind that  $\theta_0 = -k_0 + j\omega_0$  (the index zero pointing to this special case), we obtain expressions for  $r$  and  $c$

$$r = 2k_0\varrho, \quad c = 2\omega_0 l/\pi \quad (18)$$

where  $k_0$  and  $\omega_0$  are the measurable decay constant and the pulsance in this special case. Substitution of (18) in (14) and in (15) gives  $H(\theta)$  and  $\sigma(\theta)$  expressed in measurable quantities:

$$H(\theta) = \varrho c \left[ \frac{-(k-k_0) + j\omega}{-k + j\omega} \right] \\ = \frac{2\omega_0 l \varrho}{\pi} \left[ \frac{-(k-k_0) + j\omega}{-k + j\omega} \right], \quad (19)$$

$$\sigma(\theta) = \frac{-(k-k_0) + j\omega}{c} = \frac{\pi}{2\omega_0 l} [-(k-k_0) + j\omega].$$

4. Generally the measurements are made with equal lengths ( $l_1 = l_2 = l$ ) of the tube. Then Eq. (12) becomes:

$$y[H(\theta) \coth \sigma l]^2 + (\alpha + \beta)[H(\theta) \coth \sigma l] + z = 0. \quad (20)$$

Now let the quadrupole be a series impedance  $Z$ : its parameters are then

$$\alpha = \beta = 1, \quad y = 0, \quad z = ZS$$

where  $S$  is the tube cross-section.

The equation (20) becomes

$$2H(\theta) \coth \sigma l + ZS = 0. \quad (21)$$

With the approximation of the third section (Eq. (19)), we have:

$$\frac{ZS}{\varrho c} = -2 \left[ \frac{-(k-k_0) + j\omega}{-k + j\omega} \right] \coth \frac{\pi}{2\omega_0} \times \\ \times [-(k-k_0) + j\omega], \\ \frac{ZS}{\varrho c} = -2 \left[ \frac{-(k-k_0) + j\omega}{-k + j\omega} \right] \times \\ \times \frac{\sinh \left[ -\pi \left( \frac{k-k_0}{\omega_0} \right) \right] - j \sin \left( \pi \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\cosh \left[ \pi \left( \frac{k-k_0}{\omega_0} \right) \right] - \cos \left( \pi \frac{\omega}{\omega_0} \right)}. \quad (22)$$

When the impedance is very small,  $k$  too in comparison with  $\omega$ , and  $\omega$  is near to  $\omega_0$ , we obtain the approximate equation:

$$\frac{ZS}{\varrho c} = \pi \frac{k-k_0}{\omega_0} + j\pi \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}. \quad (23)$$

A second approximation is:

$$\frac{ZS}{\varrho c} = \pi \frac{k-k_0}{\omega_0} + 2j \tan \left( \frac{\pi}{2} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right). \quad (24)$$

If the quadrupole reduces to a parallel acoustic admittance  $Y$ , its parameters are

$$\alpha = \beta = 1, \quad z = 0, \quad y = Y/S.$$

Then Eq. (20) becomes

$$YH(\theta) \coth \sigma l + 2S = 0, \\ 2H(\theta) \coth \sigma l + 4S/Y = 0 \quad (25)$$

and in the same way as before:

$$\frac{4S}{Y\varrho c} = -2 \left[ \frac{-(k-k_0) + j\omega}{-k + j\omega} \right] \times \\ \times \frac{\sinh \left[ -\pi \left( \frac{k-k_0}{\omega_0} \right) \right] - j \sin \left( \pi \frac{\omega}{\omega_0} \right)}{\cosh \left[ \pi \left( \frac{k-k_0}{\omega_0} \right) \right] - \cos \left( \pi \frac{\omega}{\omega_0} \right)}. \quad (26)$$

Putting  $1/Y = Z_p$ , we have approximately, for small values of  $Z_p$ :

$$\frac{Z_p}{\varrho c S} = \frac{\pi}{4} \left( \frac{k-k_0}{\omega_0} \right) + j \frac{\pi}{4} \left( \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0} \right). \quad (27)$$

5. When a quadrupole is inserted between the tubes, a single measurement is not sufficient to determine its parameters, but in a few particular cases it is possible to derive some rather interesting results.

Let us consider a symmetrical quadrupole  $\alpha = \beta$ ; Eq. (20) then becomes:

$$y[H(\theta) \coth \sigma l]^2 + 2\alpha[H(\theta) \coth \sigma l] + z = 0. \quad (28)$$

Resolving for  $H(\theta) \coth \sigma l$ , we obtain:

$$H(\theta) \coth \sigma l = \frac{-\alpha \pm 1}{y}. \quad (29)$$

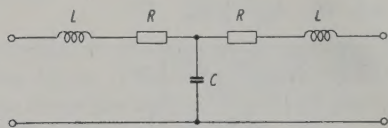


Fig. 3. Electrical equivalent of an acoustic T quadrupole.

Suppose that a T quadrupole is given, with the notation of Fig. 3 (the electrical equivalent scheme of the acoustic quadrupole). In this case the parameters of the quadrupole are:

$$\alpha = \beta = (1 - \omega^2 LC) + j\omega RC, \quad y = j\omega C/S, \quad (30)$$

$$z = \left[ 2R(1 - \omega^2 LC) + j\omega L \left( R^2 \frac{C}{L} + 2 - \omega^2 LC \right) \right] S.$$

Then from Eq. (29):

$$H(\theta) \coth \sigma l = (-R - j\omega L) S$$

$$\text{and } H(\theta) \coth \sigma l = \left( -R - j\omega L + \frac{2j}{\omega C} \right) S. \quad (31)$$

With Eq. (19), taking  $k$  small in comparison with  $\omega$ :

$$H(\theta) \coth \sigma l = \varrho c \coth \frac{\pi}{2} \left[ -\left( \frac{k - k_0}{\omega_0} \right) + j \frac{\omega}{\omega_0} \right]. \quad (32)$$

Referring to Eq. (31) we see that the system presents two frequencies of resonance. Remembering that  $k$ ,  $k_0$ ,  $\omega$ ,  $\omega_0$  are directly measured quantities, the real part of (32) gives the value of  $R$ , and the imaginary part for one of the two resonance frequencies gives  $\omega L$ ; knowing  $L$  and  $R$  we obtain  $C$  from the second resonance frequency.

6. In the previous analysis we have introduced an approximation which can be evaluated in a particular case. When we talk of impedances expressed by complex values, with a real and an imaginary component, we confine ourselves to the steady state. We shall now consider the case of the quadrupole reduced to an impedance in series, which is composed of an inductance  $L$  and a resistance  $R$  in series. In this case the equations of the quadrupole are as follows:

$$v_1(0, t) = v_2(0, t),$$

$$p_1(0, t) - p_2(0, t) = \left[ Rv(0, t) + L \frac{\partial v(0, t)}{\partial t} \right] S. \quad (33)$$

As  $v(t) = V(x) e^{\theta t}$  we have

$$P_1(0) - P_2(0) = (R + \theta L) VS. \quad (34)$$

Following the same procedure as before, and making the same approximations:

$$\frac{(R + \theta L)}{\varrho c} S = \frac{(R - kL) + j\omega L}{\varrho c} S = \frac{\pi}{\omega_0} [(k - k_0) + j(\omega_0 - \omega)] \quad (35)$$

or

$$\frac{RS}{\varrho c} = \frac{\pi}{\omega_0} \left[ k \left( 1 - \frac{\omega_0 L}{\pi \varrho c} S \right) - k_0 \right], \quad (36)$$

$$\frac{\omega L S}{\varrho c} = \frac{\pi}{\omega_0} (\omega_0 - \omega).$$

Eq. (36) differs from the previous result Eq. (23) only by an additional factor in the resistance, a factor which is quite negligible however in the actual measurements. In the general case it is seen that in order to establish exact equations it is necessary to know the structure of the impedance under examination. If this is not known, it is possible to proceed by successive approximations, first determining an approximate scheme with the aid of (23), then correcting the results to obtain a more exact approximation.

7. The experimental tube used for the measurements is quite similar to the one described by HARRIS (Fig. 1): first we have to measure the resonance frequency  $f_0$  and the decay constant  $k_0$  without the porous screen; second, the same quantities  $f$  and  $k$  are measured when the impedance is inserted in the tube. The plot of  $k_0$  as a function of frequency is shown in Fig. 4.

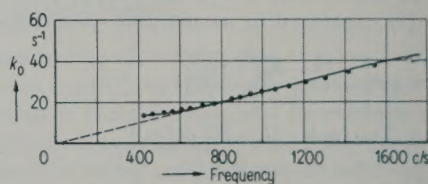


Fig. 4. Decay constant  $k_0$  of the tube as a function of frequency.

A first series of measurements has been made in order to study the impedance of a rigid plate with circular holes. This problem is very interesting because a screen of that kind constitutes a first model of a porous material.  $R$  indicates the radius of the circular plate, in which  $n$  circular holes are made of radius  $a$ ;  $d$  is the thickness of the plate.

When we neglect the radiation at the mouth of the hole and the frictional resistance, the ele-



mentary theory assimilates a hole to an acoustical reactance  $X$  with inductive characteristic, given by:

$$X = \frac{\omega \varrho d}{\pi a^2} \tag{37}$$

The acoustical relative impedance is:

$$\left(\frac{X}{\varrho c}\right) \pi R^2 = \frac{\omega d}{c} \left[\frac{1}{n} \left(\frac{R}{a}\right)^2\right] \tag{38}$$

where the expression  $n(a/R)^2$  is the porosity, determined by the ratio of the area of the holes to the area of the plate.

Eq. (38) is approximate because it is necessary to take into account the end-correction of the holes: according to LORD RAYLEIGH's theory this correction is proportional to the radius of the hole, and the length  $d$  must be increased by the quantity:

$$\frac{16}{3\pi} a = 1.7 a. \tag{39}$$

When the propagation occurs in a tube, as in the present case, another correction is necessary, calculated by BOLT, LABATE and INGÅRD [2]; these authors have determined a correction factor  $\delta$  to account for the fact that the orifice is considered to radiate as a plane piston. The correction factor  $\delta$  is a function of the ratio  $a/R$ , and of the ratio of  $R$  to the sound wavelength, but in the set of measurements reported it is sufficient to consider the values of  $\delta$  for the latter ratio equal to zero. If  $d'$  is the corrected thickness and  $d$  the real thickness of the plate, we have:

$$\frac{d'-d}{R} = \left(\frac{16}{3\pi} \frac{a}{R}\right) \delta\left(\frac{a}{R}\right) \tag{40}$$

where  $\delta(a/R)$  is the correction factor of BOLT.

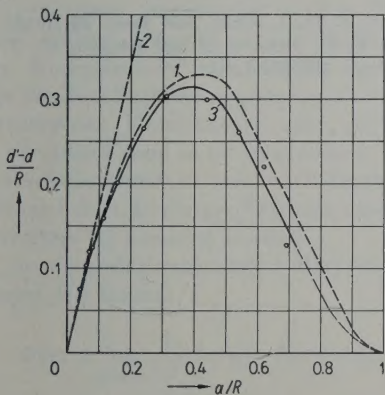


Fig. 5. The relative end correction  $(d'-d)/R$  as a function of the relative radius  $a/R$  of an orifice; Curve 1: according to BOLT, Curve 2: according to RAYLEIGH, Curve 3: measured.

For the practical calculation of  $d'$ , remembering Eq. (24) and (37), we have:

$$X \frac{\pi R^2}{\varrho c} = 2 \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right) = \left(\frac{\omega \varrho d'}{\pi a^2}\right) \left(\frac{\pi R^2}{\varrho c}\right) \tag{42}$$

from which:

$$d' = c \left(\frac{a}{R}\right)^2 \frac{2}{\omega} \tan\left(\frac{\pi}{2} \frac{\omega_0 - \omega}{\omega_0}\right). \tag{43}$$

Fig. 5 gives the values of  $(d'-d)/R$  as a function of  $a/R$ . Curve 1 represents the correction according to BOLT et al.; the straight line 2 represents the correction after LORD RAYLEIGH, when the length is infinite; the line 2 is the asymptote to curve 1 when the orifice radius tends to zero.

8. The results of the measurements are reported as curve 3 of the same Fig. 5. The dimensions of the screen used are as follows:  $R=2.5$  cm,  $d=0.5$  cm with a single central circular orifice of radius  $a$ . The results show a very good concordance with BOLT's equation for small values of  $a$ ; for higher values of  $a$  there is a slight difference.

Other experiments with plates of various thicknesses showed that when  $d < 0.5$  cm the differences are small; they are more sensible when  $d > 1$  cm.

The formula adopted for the computation of the experimental data here reported is Eq. (24), because the approximate formula (23) is not sufficiently accurate. From all the measurements made it is possible to see that the behaviour of the system is like a pure resistance in series with an inductance.

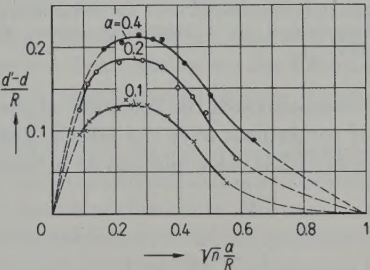


Fig. 6. The relative end correction in the case of  $n$  orifices in a triangular lattice;  $P$  = porosity  $= n(a/R)^2$ .

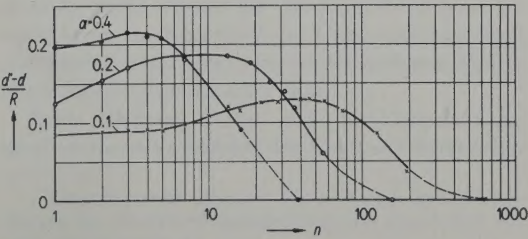


Fig. 7. Re-plot of Fig. 6 with  $n$  as independent variable.

The data reported do not take into account the frictional resistance due to the walls of the orifice: the theory of the acoustical behaviour of a narrow tube of circular section with resistance to fluid motion has been developed by CRANDALL: in the case under examination the variation of inductance due to this cause is very small.

9. The theory for the case of a plate with many circular holes is rather complicated. We shall therefore confine ourselves to giving only the experimental results for this case.

Experiments have been carried out on plates with an increasing number  $n$  of orifices, starting with one orifice in the centre of the plate and arranging the following orifices in a triangular lattice around the centre. The results are shown in Figs. 6 and 7, giving  $(d'-d)/R$  as a function of  $\sqrt{n}(a/R)$  and  $n$  respectively.  $n(a/R)^2$  is equal to the porosity of the screen. Three series with different values of  $a$  have been carried out, the ratio of the radius  $a$  to the distance between centres of the orifices always being 0.8.

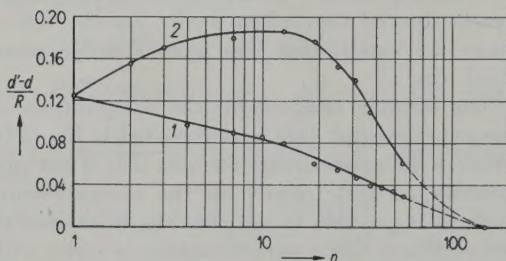


Fig. 8. The relative end correction in the case of  $n$  orifices uniformly distributed over the screen (curve 1) and concentrated in a triangular lattice as before (curve 2).

Fig. 8 demonstrates the influence of the distribution of the orifices over the screen. The quantity  $(d'-d)/R$  has been plotted as a function of

$n$  for an "uniform" distribution (curve 1) and for the "concentrated" distribution as above (curve 2, i.e. the curve for  $a=0.2$  of Fig. 7).

Finally Fig. 9 reports measurements on a screen with six orifices of radius  $a=0.2$  cm arranged in a regular hexagon of variable side  $x$ . The result at  $x=0$  refers to the case of one central orifice of equal surface as the sum of the surfaces of the six orifices considered. The relative end correction  $(d'-d)/R$  decreases with increasing distance  $x$  between the orifices.

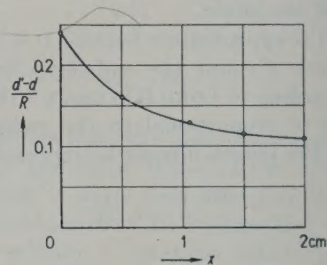


Fig. 9. The relative end correction with six orifices grouped as a regular hexagon as a function of the side  $x$  of the hexagon.

10. In order to study better the behaviour of screens with circular orifices, it appears from the results reported that a great number of experiments would be necessary, owing to the large number of parameters involved. The measurements exhibit the possibilities of the method adopted and at the same time give some data concerning problems of walls with orifices, which are to-day very important for sound absorbers in the form of Helmholtz resonators.

(Received 15th November, 1953.)

#### References

- [1] HARRIS, C. M., J. acoust. Soc. Amer. **20** [1948], 440.
- [2] BOLT, R. H., LABATE, S. and INGÅRD, U., J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 94.



# UNTERSUCHUNG UNPERIODISCHER ZEITVORGÄNGE MIT DER AUTOKORRELATIONS- UND DER FOURIERANALYSE

von MARIE-LUISE EXNER

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

## Zusammenfassung

Von einer Reihe unperiodischer Zeitvorgänge, besonders von gefiltertem Rauschen und Zischlauten, werden Autokorrelations- und Frequenzanalysen gemacht. Lage und Bandbreite der Frequenzgebiete ergeben sich am übersichtlichsten aus der Frequenzanalyse, dagegen kann man die Energien, die in den einzelnen Frequenzbändern enthalten sind, im allgemeinen am einfachsten aus der gemessenen Autokorrelationsfunktion ablesen. Die mittlere Zahl der Nullstellen der Zeitfunktion wird aus der Krümmung der Autokorrelationsfunktion in der Umgebung des Nullpunktes und außerdem mit einem Dezimalzähler bestimmt; die zweite Methode erwies sich als genauer.

## Summary

Auto-correlation and frequency analyses of a series of aperiodic time events, especially filtered noises and hisses, have been made. The position and band width of the frequency range are best obtained from the frequency analysis but the energies contained in the several bands are most easily obtained from the auto-correlation function.

The mean number of null-points of the time function is estimated from the curvature of the latter function in the vicinity of the null-point and also with the aid of a decimal counter. The second method is found to be more exact.

## Sommaire

On a fait des analyses en fréquence et en autocorrélation de toute une série de phénomènes non périodiques dans le temps, en particulier d'un bruit filtré et des sons chuintants. La position et la largeur des bandes de fréquences ressortent le plus nettement de l'analyse en fréquence, tandis que c'est la fonction autocorrélation mesurée qui permet le plus simplement, en général, de connaître l'énergie sonore dans les différentes bandes de fréquence. On a déterminé le nombre moyen d'annulations de la fonction temps, soit à partir de la courbure de la fonction corrélation au voisinage du point zéro, soit au moyen d'un compteur décimal; la seconde méthode s'est révélée plus précise.

## 1. Einleitung

Für die Analyse von Sprachlauten ist bisher fast nur die Fourierzerlegung des Zeitvorganges nach Frequenzen angewendet worden. Für Vokale und andere Geräusche mit vorwiegend periodischen Komponenten ist zweifellos die Klanganalyse das dem Problem angemessene Verfahren. Die stimmlosen Konsonanten sind jedoch nur wenig periodisch, und es ist zu erwarten, daß die Autokorrelationsanalyse eine vorteilhaftere Beschreibung liefert. Derartige Versuche sind bereits von STEVENS [1] gemacht worden.

Die Autokorrelationsfunktion  $\Phi(\tau)$  eines Zeitvorganges  $f(t)$  lautet:

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} f(t) \cdot f(t \pm \tau) dt. \quad (1)$$

Dabei ist  $f(t \pm \tau)$  die Zeitfunktion zu einem früheren bzw. späteren Zeitpunkt  $\tau$ . Die Autokorrelationsfunktion ist also eine vereinfachte Form der

Zeitfunktion, in der alle Phasenbeziehungen vernachlässigt werden. Sie verhält sich zu der ursprünglichen Zeitfunktion wie das Leistungsspektrum  $|\bar{A}(\nu)|^2$  zur Spektralfunktion  $\bar{A}(\nu)$  (nach Betrag und Phase).

Nach WIENER, der die Autokorrelationsfunktion in die Nachrichtentechnik<sup>1</sup> eingeführt hat, gilt das nach ihm benannte Theorem, nach dem das Leistungsspektrum und die Autokorrelationsfunktion einer Zeitfunktion ein Paar von Fourier-transformierten bilden. Es ist also grundsätzlich nicht zu erwarten, daß die Autokorrelationsanalyse mehr leistet als die Fourieranalyse, jedoch kann im Einzelfall die Untersuchung einer Zeitfunktion nach der einen oder anderen Analysemethode vorteilhafter sein.

Zum Beispiel bietet die Autokorrelationsanalyse einen Vorteil bei der Analyse statistischer

<sup>1</sup> Eine Übersicht über die Eigenschaften und Anwendungen der Autokorrelationsfunktion gibt eine Arbeit von LEE und WIESNER [2].



Vorgänge, von denen nur die Wahrscheinlichkeitsverteilung bekannt ist [3]. Solche Vorgänge sind der theoretischen Behandlung mit der Fourieranalyse nicht direkt zugänglich, während man mit Hilfe der Ergodenhypothese (Gleichheit von Scharmittel und Zeitmittel eines statistischen Vorganges) aus der Wahrscheinlichkeitsverteilung direkt die Autokorrelationsfunktion berechnen kann. Erst aus ihr erhält man durch eine Fouriertransformation das Frequenzspektrum des statistischen Vorganges. Von dieser Eigenschaft der Autokorrelationsfunktion als Mittlerin zwischen Wahrscheinlichkeitsverteilung und Frequenzspektrum eines statistischen Geräusches wird jedoch in dieser Arbeit kein Gebrauch gemacht.

Da die Autokorrelationsanalyse von Zeitfunktionen eine etwas ungewohnte Betrachtungsweise darstellt, scheint es zweckmäßig, zunächst einmal die Autokorrelationsfunktionen einfacher Geräusche zu messen und sie den ebenfalls gemessenen Fourierspektren gegenüberzustellen, ehe man beginnt, komplexe Geräusche, wie z. B. Zischlaute, zu analysieren. Dementsprechend gliedern sich die vorliegenden Versuche in vier Gruppen:

- Untersuchungen an gefiltertem Rauschen,
- Untersuchungen an lagemodulierten Impulsen,
- Untersuchungen an Rauschen, dem eine rein periodische Komponente überlagert ist,
- Untersuchung stimmloser und stimmhafter Zischlaute.

Einige Eigenschaften der Autokorrelationsfunktion seien vorausgeschickt:

a) Die Autokorrelationsfunktion ist eine symmetrische Funktion. Ihr Maximalwert liegt bei  $\tau=0$  und ist gleich dem quadratischen Zeitmittel der Zeitfunktion

$$\Phi(0) = \overline{f^2(t)}. \quad (2)$$

b) Die Autokorrelationsfunktion einer Sinus- oder Kosinusfunktion ist eine Kosinusfunktion der gleichen Periode. Die Autokorrelationsfunktion eines statistischen Rauschens ist eine Exponentialfunktion, die um so schneller abfällt, je höhere Frequenzen das Rauschen enthält. Allgemein kann gesagt werden: Je breiter das Frequenzband einer Zeitfunktion, um so rascher fällt ihre Autokorrelationsfunktion mit zunehmendem  $\tau$  ab.

c) Enthält das Geräusch verschiedene periodische und unperiodische Komponenten, so beginnt jede bei  $\tau=0$  mit ihrem Maximalwert und fällt dann entsprechend ihrer Frequenzbandbreite schneller oder langsamer ab, unabhängig von den anderen Komponenten. Auf diese Weise können z. B. periodische Komponenten aus einem unperiodischen Geräusch (Rauschen) herausgesiebt werden. Bei  $\tau=0$  kann der Energieanteil  $\overline{f^2(t)}$  jeder Komponente abgelesen werden.

d) Die Krümmung der Autokorrelationsfunktion im Nullpunkt hängt mit der mittleren Zahl  $\overline{q_0}$  der Nulldurchgänge pro Sekunde der ursprünglichen Funktion zusammen:

$$\overline{q_0} = k_0 \sqrt{\frac{-\Phi''(0)}{\Phi(0)}}, \quad k_0 \approx \frac{1}{\pi} \quad (3)$$

(siehe hierzu [4] und [5]).

e) Für die mittlere Zahl der Maxima und Minima der Zeitfunktion pro Sekunde gilt entsprechend:

$$\overline{q_m} = k_m \sqrt{\frac{\Phi^{IV}(0)}{-\Phi''(0)}}, \quad k_m \approx \frac{1}{\pi}. \quad (4)$$

## 2. Berechnung der Autokorrelationsfunktion von gefiltertem Rauschen [3], [5]

Die Autokorrelationsfunktion von gefiltertem Rauschen kann auf zwei verschiedenen Wegen berechnet werden. Der erste macht Gebrauch von der Definition der Autokorrelationsfunktion Gl. (1) und der zweite benutzt das WIENERSche Theorem.

a) Die Zeitfunktion, die mit sich selbst korreliert werden soll, ist die Empfangsfunktion des Filters, wenn dieses mit einem statistischen Rauschen mit konstanter Spektralampplitude (weißes Rauschen) erregt wird. Ein solches Rauschen kann man sich als eine statistische, unendlich dichte Folge von  $\delta$ -Impulsen vorstellen. Bei Erregung des Filters durch einen einzelnen  $\delta$ -Impuls ist die Empfangsfunktion gleich der sogenannten Gewichtsfunktion  $W(t)$  des Filters, die mit seiner Übertragungsfunktion  $Y(\nu)$  durch eine Fouriertransformation verbunden ist

$$W(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} Y(\nu) e^{j2\pi\nu t} d\nu. \quad (5)$$

Die Autokorrelationsfunktion der Ausgangsspannung ist in diesem Fall nach Gl. (1):

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} W(t) \cdot W(t \pm \tau) dt. \quad (6)$$

Es läßt sich zeigen [3], daß Gl. (6) nicht nur bei Erregung des Filters mit einem einzelnen  $\delta$ -Impuls gilt, sondern auch bei Erregung mit einer statistischen Folge von  $\delta$ -Impulsen, also bei Rauschen. Die Autokorrelationsfunktion des gefilterten Rauschens kann also berechnet werden, wenn die Übertragungsfunktion des Filters bekannt ist.

b) Das WIENERSche Theorem stellt eine Beziehung her zwischen der Autokorrelationsfunktion und der Spektraldichte einer Zeitfunktion:

Die Zeitfunktion sei  $f_T(t)$  im Bereich  $-T < t < +T$  und Null außerhalb dieses Bereiches. Dann ist ihre Fouriertransformierte, die Spektralfunktion,

$$A_T(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_T(t) e^{-j2\pi\nu t} dt = \int_{-T}^{+T} f(t) e^{-j2\pi\nu t} dt. \quad (7)$$

Die Spektraldichte ist definiert als:

$$G(\nu) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} |A_T(\nu)|^2. \quad (8)$$



Das WIENERSche Theorem lautet

$$\Phi(\tau) = \int_0^\infty G(\nu) \cos 2\pi\nu\tau d\nu, \quad (9)$$

es besagt also, daß Autokorrelationsfunktion und Spektraldichte durch eine Fouriertransformation verbunden sind.

Die Spektraldichte der Ausgangsspannung eines Filters, dessen Eingangsspannung ein weißes, statistisches Rauschen der Spektraldichte  $N$  ist, läßt sich aus der Übertragungsfunktion berechnen:

$$G(\nu) = N|Y(\nu)|^2. \quad (10)$$

Für die Berechnung der Autokorrelationsfunktion von gefiltertem Rauschen ergibt sich also folgendes Schema:

$$(1.) \quad \begin{array}{c} \boxed{Y(\nu)} \\ \boxed{W(t)} \\ \boxed{\Phi(\tau)} \end{array} \quad (2.) \quad \boxed{G(\nu)}$$

Im ersten Fall geht man zuerst durch Fouriertransformation von der Frequenz- in die Zeitebene über und eliminiert dann alle Phasenbeziehungen, im zweiten Fall verzichtet man schon im Frequenzbereich auf die Phasen und führt erst dann eine Fouriertransformation durch.

In der vorliegenden Arbeit erwies es sich als günstig, bei den RC- und LC-Filtern die 1. Methode und bei den Rechteckfiltern die 2. Methode anzuwenden.

### Beispiele:

#### 1. RC-Filter

Die Übertragungsfunktion des RC-Filters liest man aus dem Schaltbild (Abb. 6a oben) ab:

$$Y(\nu) = \frac{1/j2\pi\nu C}{R + 1/j2\pi\nu C} = \frac{1/RC}{j2\pi\nu + 1/RC}. \quad (11)$$

Daraus ergibt sich durch Fouriertransformation die Gewichtsfunktion:

$$W(t) = \frac{1}{RC} \cdot e^{-t/RC}. \quad (12)$$

Nach Gl.(6) erhält man für die Autokorrelationsfunktion:

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{2T} \frac{1}{(RC)^2} \int_{-T}^{+T} (e^{-t/RC})^2 e^{-|\tau|/RC} dt \quad (13)$$

oder

$$\Phi(\tau) = \Phi(0) e^{-|\tau|/RC} \quad \text{mit} \quad \Phi(0) = \overline{W^2(t)}. \quad (14)$$

In gleicher Weise ergibt sich für das LC-Filter (Abb. 7a oben) mit der Übertragungsfunktion

$$Y(\nu) = \frac{1/LC}{(j2\pi\nu + \alpha)^2 + \beta^2}. \quad (15)$$

$$\Phi(\tau) = \Phi(0) e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta|\tau|. \quad (16)$$

Dabei ist  $\beta$  die Eigenfrequenz des gedämpften Kreises, während in  $\alpha$  alle Verluste des Filters eingehen. Die Autokorrelationsfunktion ist also eine exponentiell gedämpfte Kosinusfunktion.

#### 2. Rechteckfilter

Übertragungsfunktion:

$$Y(\nu) = A \quad \text{für} \quad \nu_0 - \Delta\nu/2 < \nu < \nu_0 + \Delta\nu/2, \quad (17)$$

$$Y(\nu) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Die Spektraldichte des gefilterten Rauschens ist nach Gl.(10)

$$G(\nu) = NA^2 \quad \text{im Übertragungsbereich,} \quad (18)$$

$$G(\nu) = 0 \quad \text{sonst.}$$

Nach dem WIENERSchen Theorem Gl.(9) ergibt sich für die Autokorrelationsfunktion:

$$\Phi(\tau) = NA^2 \int_{\nu_0 - \Delta\nu/2}^{\nu_0 + \Delta\nu/2} \cos 2\pi\nu\tau d\nu, \quad (19)$$

$$\Phi(\tau) = \frac{NA^2}{\pi} \cos 2\pi\nu_0\tau \frac{\sin \pi \Delta\nu\tau}{\tau}. \quad (20)$$

Die Autokorrelationsfunktion des Rechteckfilters ist eine Kosinusfunktion, deren Amplitude nicht exponentiell, sondern wie eine Spaltfunktion abnimmt.

Für den rechteckig begrenzten Tiefpaß mit der Grenzfrequenz  $\nu_{gr}$  gilt mit  $\Delta\nu = 2\nu_0 = \nu_{gr}$ :

$$\Phi(\tau) = \frac{NA^2}{2\pi} \frac{\sin 2\pi\nu_{gr}\tau}{\tau}. \quad (21)$$

#### 3. Apparaturen

##### A) Autokorrelator

Es wurde eine Apparatur entwickelt, die es gestattet, aus einer beliebigen Zeitfunktion  $f(t)$  die Autokorrelationsfunktion nach Gl.(1) zu bestimmen. Ihr Prinzipschaltbild zeigt Abb. 1.

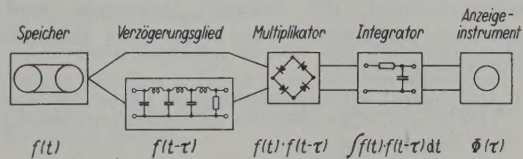


Abb. 1. Prinzipschaltbild des Autokorrelators.

Als Speicher für die Zeitfunktion diente im allgemeinen ein endloses Magnetophonband von etwa 1 m Länge, das bis zu 95 % seiner Länge besprochen werden konnte. Die Lücke der Aufzeichnung war durch den Abstand des Löschkopfes vom Sprechkopf gegeben. Die Frequenzkurve des Magnetophons erkennt man aus Abb. 2, wobei die Ordinate einen linearen Maßstab hat. Diese Aufzeichnung wurde dadurch gewonnen, daß ein sehr breitbandiges Rauschen auf das

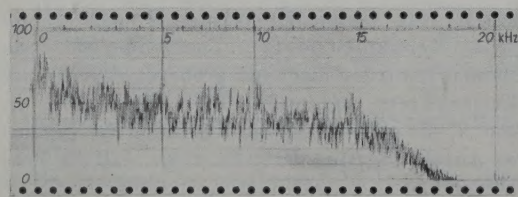


Abb. 2. Frequenzkurve des Speichermagnetophons.



Magnetophonband aufgesprochen wurde und das abgespielte Geräusch mit einem Hochtonanalysator [7] analysiert wurde. Die Übertragung ist bis etwa 16 kHz sehr gleichmäßig und fällt dann schnell ab. Bei Messungen mit reinen Tönen und bei den Rauschuntersuchungen wurde die Zeitfunktion ohne Verwendung eines Speichers direkt dem Schwebungssummeer bzw. dem Rauschgenerator entnommen.

Als Verzögerungsmechanismus wurde eine reflexionsfrei abgeschlossene Laufzeitkette verwendet. Die Daten der Kette waren  $C = 48900$  pF und  $L = 5,99$  mH. Daraus ergibt sich ein Wellenwiderstand  $Z = 350 \Omega$  und eine Laufzeitverzögerung pro Glied  $\tau_0 = 17,2 \mu\text{s}$ . Die gemessene Grenzfrequenz war 25 kHz. Die Dämpfung der Kette betrug für 50 Glieder, also eine Verzögerung von etwa  $850 \mu\text{s}$ , 1,2 dB bei 2000 Hz und bis zu 1,5 dB bei höheren Frequenzen. Um die durch Anpassungseffekte erzeugte Frequenzabhängigkeit für die verzögerte und die unverzögerte Spannung gleichzumachen, wurde auch die letzte über einige Glieder einer gleichartigen Laufzeitkette geleitet. Daraus ergab sich außerdem der Vorteil, daß auch negative Verzögerungen realisiert werden konnten. Maximal konnte die Zeitfunktion um  $+2,5$  ms und  $-0,14$  ms verzögert werden.

**Multiplikation.** Von den vielen Multiplikationsverfahren, die bekannt geworden sind, scheiden die meisten aus, wenn man folgende Forderungen stellt:

1. Das Produkt soll Null sein, wenn ein Faktor Null wird (das ist z. B. nicht erfüllt bei multiplikativer Mischung mit einer Hexode).
2. Es soll eine echte Vierquadranten-Multiplikation ausgeführt werden, d. h. das Vorzeichen der beiden Faktoren soll berücksichtigt werden (nicht erfüllt bei allen logarithmischen und Impulsmodulationsverfahren).
3. Der Multiplikator soll nicht gleichzeitig mit einer festen Zeitkonstanten integrieren (z. B. nicht erfüllt bei Dynamometern, Elektrometern, Thermoumformern).
4. Die Frequenzkurve des Multiplikators muß von etwa 50 Hz–15 kHz gerade sein.
5. Unabhängigkeit der Multiplikation von den Speisespannungen des Multiplikators (nicht erfüllt beim Arbeiten im quadratischen Bereich von Röhrenkennlinien).

Alle vorgenannten Forderungen werden in sehr einfacher Weise erfüllt von einem Ringmodulator, dessen vier Gleichrichterelemente sehr genau gleiche Kennlinien besitzen. Zueinander passende Elemente wurden aus einer größeren Anzahl von Gleichrichtern herausgesucht<sup>2</sup>. Die Kurve in Abb. 3, die gleichzeitig die Kennlinie des gesamten Autokorrelators darstellt, zeigt, daß die Pro-

duktspannung  $\Phi(0)$  in einem weiten Bereich proportional dem Produkt der beiden (in diesem Falle gleichen) Eingangsspannungen  $f^2(t)$  ist. Die Aussteuerung des Multiplikators betrug bei dieser Messung 30 mV. Bei größerer Aussteuerung wird das Produkt  $\Phi(0)$  zu klein angezeigt. Kleine Unsymmetrien der Gleichrichter können durch Umpolen einer der beiden Spannungen am Multiplikator und Mittelbildung weitgehend ausgeglichen werden.

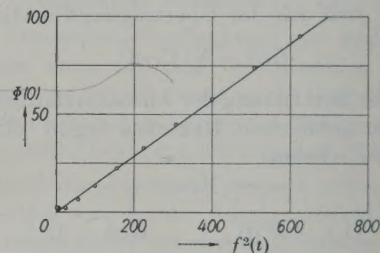


Abb. 3. Kennlinie der gesamten Autokorrelationsapparatur.

Die Integration wurde mit einem RC-Glied ausgeführt, dessen Zeitkonstante leicht geändert werden konnte. Gewöhnlich wurde mit einer Zeitkonstante  $RC = 50$  ms ( $R = 5$  k $\Omega$ ,  $C = 10$   $\mu\text{F}$ ) gearbeitet. Es handelt sich bei den vorliegenden Messungen also um eine Autokorrelation mit begrenzter Integrierdauer, eine Kurzzeitaufkorrelation [6].

**Anzeigemechanismus.** Die vom Integrator gelieferte sehr kleine Gleichspannung ist der Autokorrelationsfunktion proportional und könnte direkt mit einem sehr empfindlichen Galvanometer gemessen werden. Um die unbequeme Galvanometermessung zu umgehen und um die Möglichkeit zu haben, die Meßergebnisse automatisch zu registrieren, wurde jedoch die Gleichspannung mit einem Relais im Takt der Netzfrequenz zerhackt und aus der entstehenden Rechteckspannung mit einem Oktavsieb die Grundfrequenz herausgesiebt. Nach entsprechender Verstärkung wurde diese Wechselfrequenz einem Kathodenstrahloszillographen zugeführt, auf dessen Schirm man, bei Synchronisation der Zeitablenkung mit der Netzfrequenz, die Autokorrelationsfunktion nach Betrag und Vorzeichen ablesen konnte. Meist wurde jedoch wegen der größeren Ablesegenauigkeit der Betrag von  $\Phi(\tau)$  an einem mit dem Meßverstärker verbundenen Zeigerinstrument abgelesen.

### Prüfung des Autokorrelators

#### 1. Frequenzabhängigkeit

Die Frequenzabhängigkeit der gesamten Autokorrelationsapparatur (ohne das Speichermagnetophon) zeigt Abb. 4. Die Kurve ist glatt bis

<sup>2</sup> Die Zusammenstellung des Multiplikators besorgte Herr cand. phys. S. VOGEL.



etwa 10 kHz. Die Welligkeit bei höheren Frequenzen ist durch die Laufzeitketten bedingt, deren Wellenwiderstand in der Nähe der Grenzfrequenz nicht mehr konstant ist.

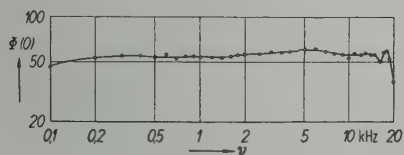


Abb. 4. Frequenzkurve des Autokorrelators.

## 2. Autokorrelation einer Sinusschwingung

In Abb. 5 ist als ausgezogene Kurve die berechnete Autokorrelationsfunktion einer Sinusschwingung von 1940 Hz dargestellt, die Punkte wurden gemessen. Die Übereinstimmung ist bei kleinerem  $\tau$  sehr gut, bei größerem  $\tau$  macht sich die Dämpfung der Laufzeitkette bemerkbar, für die man jedoch leicht eine Korrektur anbringen kann, wenn man die gemessenen Werte im logarithmischen Maßstab aufzeichnet.

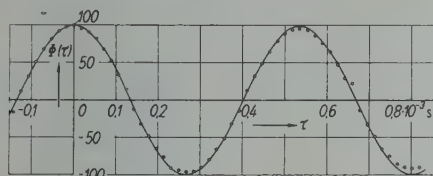


Abb. 5. Autokorrelationsfunktion einer Sinusfunktion;  
— berechnet für  $\nu = 1940$  Hz,  $\circ \circ \circ$  gemessen.

## 3. Autokorrelation einer periodisch unterbrochenen Zeitfunktion

Da bei allen Sprachuntersuchungen die Zeitfunktion wegen der Lücke auf dem Magnetophonband periodisch unterbrochen war, wurde mit Hilfe einer auf Band aufgesprochenen Sinusfunktion sichergestellt, daß auch in diesem Fall die Apparatur einwandfrei arbeitet.

### B) Klanganalysator

Zur Klanganalyse wurde der Hochtonanalysator von TAMM und PRITSCHING [7] verwendet. Er enthält ein mechanisches Filter von 15 Hz Bandbreite und sehr großer Flankensteilheit. Die Analysierzeit beträgt 150 s für den Frequenzbereich 0–20 kHz.

### C) Dezimalzähler

Zur Bestimmung der Nullstellen der Zeitfunktion wurde ein elektronischer Dezimalzähler<sup>3</sup> benutzt. In diesem Gerät wird für jeden Nulldurchgang der Eingangsspannung durch einen

Trigger ein Impuls ausgelöst, der in üblicher Weise nach dem Multivibratorprinzip gezählt wird. Der Apparat kann bei regelmäßiger Folge der Nullstellen (Sinusschwingung) etwa  $2 \cdot 10^6$  Nullstellen pro Sekunde zählen, er besitzt also ein zeitliches Auflösungsvermögen von  $0,5 \cdot 10^{-6}$  s. Dieses Auflösungsvermögen sollte ausreichen, auch die unregelmäßig aufeinanderfolgenden Nullstellen statistischer Geräusche exakt zu erfassen, vorausgesetzt, daß ein Frequenzbereich von 20 kHz nicht wesentlich überschritten wird.

Bei statistischen Vorgängen ist die gemessene Zahl der Nullstellen etwas von der Eingangsspannung des Zählers abhängig. Ist nämlich das Maximum zwischen zwei benachbarten Nullstellen so klein, daß der Trigger nicht anspricht, so wird durch sie nur ein Impuls ausgelöst. Andererseits kann es bei sehr großen Eingangsspannungen vorkommen, daß der Zähler für kurze Zeit blockiert wird, so daß zuwenig Nullstellen angezeigt werden. Aus diesen Gründen wurde bei jedem Geräusch die Abhängigkeit der Nullstellenzahl von der Eingangsspannung des Zählers gemessen und die Messung nur dann als zuverlässig angesehen, wenn die Anzeige über einen größeren Bereich der Eingangsspannung konstant blieb.

## 4. Meßergebnisse

### A) Gefiltertes Rauschen

Als Rauschquelle diente ein Breitbandverstärker (ROHDE & SCHWARZ), der ein sehr gleichmäßiges, weit über 20 kHz hinausreichendes Rauschen lieferte.

Es sind zwei Gruppen von Filtern zu unterscheiden, die gewöhnlichen RC- und LC-Filter und die sogenannten „idealen Filter“, deren Durchlaßbereich rechteckig begrenzt ist, z. B. in gewisser Annäherung Oktav- und Terzfilter und Tiefpässe. Bei den Rechteckfiltern hat die Umhüllende der Autokorrelationsfunktion die Gestalt einer Spaltfunktion  $\left(\frac{\sin a\tau}{a\tau}\right)$ , während sie

bei den LC-Filtern eine Exponentialfunktion ist.

Bei jedem Geräusch wurden folgende Messungen ausgeführt:

- α) Messung der Frequenzkurve des Filters mit reinen Tönen.
- β) Klanganalyse des gefilterten Rauschens mit dem Hochtonanalysator.
- γ) Autokorrelationsanalyse des gefilterten Rauschens.
- δ) Bestimmung der mittleren Zahl der Nullstellen pro Sekunde der Zeitfunktion mit dem Dezimalzähler.

<sup>3</sup> Entwickelt im III. Physikalischen Institut der Universität Göttingen von H. HENZE.

## 1. Rauschen über RC-Filter (Abb. 6a oben)

$$R = 16 \text{ k}\Omega; C = 4,5 \cdot 10^{-9} \text{ F}; RC = 72 \cdot 10^{-6} \text{ s.}$$

Frequenzkurve des Rauschens:

$$|A(\nu)| = 1/\sqrt{1 + (\nu/\nu_{gr})^2}, \quad \nu_{gr} = 1/2\pi RC = 2210 \text{ Hz.}$$

Autokorrelationsfunktion:

$$\Phi(\tau) = \Phi(0) e^{-|\tau|/RC}$$

Messungen:

$\alpha, \beta$ ) Die mit reinen Tönen und durch Klanganalyse des gefilterten Rauschens bestimmten Frequenzkurven des Filters ergeben eine Grenzfrequenz von 2220 Hz. Bei höheren Frequenzen tritt bis 25 kHz der normale Abfall mit  $1/\nu$  auf, noch höhere Frequenzen werden von der Laufzeitkette vollkommen abgeschnitten.

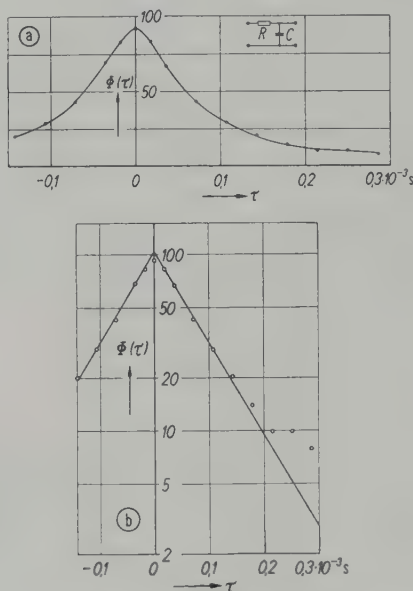


Abb. 6. Rauschen über RC-Filter. Autokorrelationsfunktion

(a) in linearem,

(b) in logarithmischem Maßstab.

$\gamma$ ) In Abb. 6 ist die gemessene Autokorrelationskurve in linearem und logarithmischem Maßstab dargestellt. Sie ist im wesentlichen eine Exponentialfunktion mit einer Zeitkonstante  $RC = 80 \mu\text{s}$ . Dem entspricht eine Grenzfrequenz von 2000 Hz; die Abweichung gegenüber dem theoretischen Wert beträgt also etwa 10 %. Der Grund dafür, daß die Autokorrelationsfunktion bei  $\tau = 0$  abgeflacht ist, liegt darin, daß die Frequenzen über 25 kHz vollständig fehlen (siehe  $\alpha$ ). Aus dem Krümmungskreis im Nullpunkt ergibt sich für die mittlere Zahl der Nullstellen nach Gl. (3) ein Wert von  $8,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ . Diese Zahl ist sehr unsicher, da nicht bei genügend kleinem  $\tau$  gemessen werden konnte.

$\delta$ ) Die Zählermessung ergab für die mittlere Zahl der Nullstellen einen Wert von  $6,2 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

Meßergebnisse an weiteren RC-Filtern<sup>4</sup>, deren Zeitkonstanten einen Bereich von 1:50 umfaßten, sind in der Tabelle I aufgeführt.

Tabelle I

R	C	$RC_{\text{theor.}}$	$RC_{\text{autokor.}}$	$f_{gr}$
k $\Omega$	$10^{-9}$ F	$10^{-3}$ s	$10^{-3}$ s	Hz
80	18	1,44	1,2	110
50	18	0,90	0,8	177
30	18	0,54	0,5	395
15	18	0,27	0,3	590
15	6	0,090	0,086	1770
16	4,5	0,072	0,080	2210
15	1,9	0,029	0,034	5500

## Ergebnis:

Rauschen, das durch ein RC-Filter gegangen ist, läßt sich mit dem Autokorrelator bequem analysieren. Die Zeitkonstante  $RC$  des Filters wird mit der angegebenen Apparatur auf etwa 10 % genau bestimmt. Wichtig ist jedoch, daß zwischen Filter und Multiplikator keine Phasendrehungen auftreten, sonst wird die Autokorrelationskurve verfälscht. Ein Abschneiden der hohen Frequenzen zwischen Filter und Multiplikator macht sich dadurch bemerkbar, daß die Autokorrelationskurve nicht mit einer endlichen Steigung in den Punkt  $\tau = 0$  einläuft, sondern dort abgeflacht ist.

## 2. Rauschen über LC-Filter (Abb. 7a oben) verschiedener Dämpfung

$$L = 4,9 \text{ H}; C = 630 \text{ pF}; \nu_0 = 2865 \text{ Hz.}$$

Der Verlustfaktor der Spule war sehr klein,  $\eta_{0L} = R_r/2\pi\nu_0 L = 0,06$ . Der Verlustfaktor des Kondensators wurde durch Parallelschalten von Widerständen  $R_p$  verändert ( $\eta_{0C} = 1/R_p 2\pi\nu_0 C = 0,22; 0,44$  und  $1,10$ ). Die Frequenzkurve des Rauschens ist:

$$|A(\nu)| = \sqrt{\frac{1}{[1 - (2\pi\nu)^2 LC + R_r/R_p]^2 + (2\pi\nu)^2 LC(\eta_{0L} + \eta_{0C})^2}}$$

Sie hat, wie sich durch Differenzieren ergibt, ein Maximum bei  $\nu_r$ , der Resonanzfrequenz des Filters:

$$\nu_r = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2} \left( \frac{\eta_{0L} + \eta_{0C}}{\eta_{0L}} \right)^2}$$

Die Autokorrelationsfunktion lautet:

$$\Phi(\tau) = \Phi(0) e^{-\alpha|\tau|} \cos \beta|\tau|$$

mit

$$\alpha = \frac{1}{2} \left( \frac{R_r}{L} + \frac{1}{R_p C} \right),$$

$$\beta^2 = \frac{1}{LC} - \frac{1}{4} \left( \frac{R_r}{L} - \frac{1}{R_p C} \right)^2.$$

$\beta = 2\pi\nu_f$  ist die Kreisfrequenz der freien gedämpften Schwingung des Filters. Die Frequenz

$$\nu_f = \nu_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4} (\eta_{0L} - \eta_{0C})^2}$$

stimmt nur im Fall sehr kleiner Dämpfung mit der Resonanzfrequenz  $\nu_r$  überein.

Für die mittlere Zahl der Nullstellen pro Sekunde des gefilterten Rauschens ergibt sich nach Gl. (3):

$$n = \frac{1}{\pi} \sqrt{\frac{-\Phi''(0)}{\Phi(0)}} = 2\nu_r.$$

<sup>4</sup> Herrn cand. phys. P. DÄMMIG danke ich für seine Hilfe bei der Durchführung der RC-Filtermessungen.



Messungen:

$R_p = 400 \text{ k}\Omega; \eta_{0C} = 0,22.$

Der gesamte Verlustfaktor des Filters ist:

$\eta_0 = 0,22 + 0,06 = 0,28.$

α) Aus der mit reinen Tönen gemessenen Filterkurve (Abb. 7a) ergibt sich eine Resonanzfrequenz  $\nu_r = 2820 \text{ Hz}$  (theoretisch  $2820 \text{ Hz}$ ) und eine Halbwertsbreite  $\Delta \nu = 870 \text{ Hz}$ . Der gemessene Verlustfaktor ist also  $\eta_0 = 0,30$ .

β) Die Klanganalyse (Abb. 7b) des gefilterten Rauschens zeigt das gleiche Bild, jedoch kann man Resonanzfrequenz und Halbwertsbreite nicht mit der gleichen Genauigkeit ablesen wie bei der Filtermessung mit reinen Tönen.

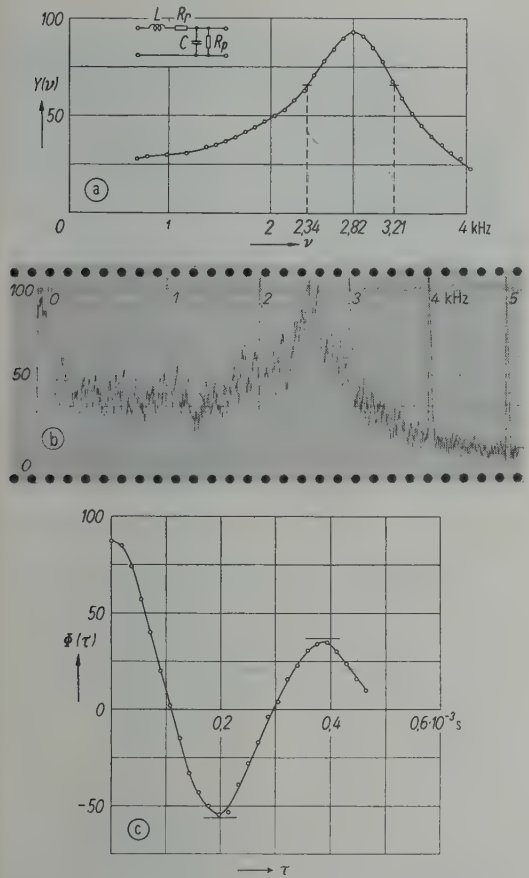


Abb. 7. Rauschen über LC-Filter ( $\Delta \nu/\nu_0 = 0,28$ );  
(a) Frequenzkurve des Filters,  
(b) Klanganalyse des gefilterten Rauschens,  
(c) Autokorrelationskurve (waagerechte Striche: Höhe der Maxima bei Berücksichtigung der Kettenverluste).

γ) Aus der gemessenen Autokorrelationsfunktion (Abb. 7c) ergibt sich eine Frequenz von  $2740 \text{ Hz}$  (theoretisch  $2850 \text{ Hz}$ ) und eine Dämpfung  $\eta = \frac{1}{\pi} \ln \frac{\Phi(0)}{\Phi_{\max 1}} = 0,28$  (theoretisch ebenfalls  $\eta_0 = 0,28$ ). Dabei wurde die Dämpfung der Kette berücksichtigt. Die Ermittlung der Nullstellen der Zeitfunktion aus dem Krümmungsradius der Auto-

korrelationsfunktion bei  $\tau = 0$  ist sehr ungenau. Ungefähr ergibt sich  $n = 4000 \text{ s}^{-1}$ .

δ) Die Bestimmung der Nullstellenzahl pro Sekunde mit dem Dezimalzähler ergab  $n = 5050 \pm 60$ , oder als Frequenz ausgedrückt:  $\nu = 2525 \pm 30 \text{ Hz}$  (theoretisch  $2820 \text{ Hz}$ ).

Messungen bei einem anderen Verlustfaktor des LC-Filters sind in Abb. 8 zusammengestellt. Man sieht deutlich, in welcher Weise Frequenzkurve und Autokorrelationskurve voneinander abhängen. Je breiter die Frequenzkurve ist, um so gedämpfter ist die Autokorrelationsfunktion.

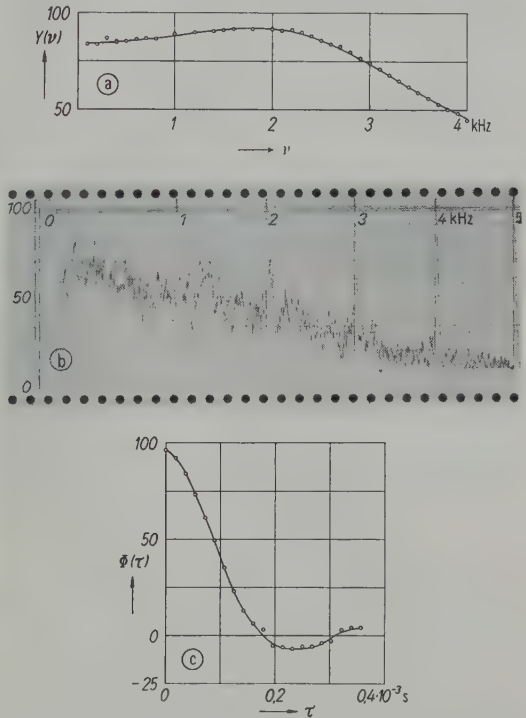


Abb. 8. Rauschen über LC-Filter ( $\Delta \nu/\nu_0 = 1,2$ );  
(a) Frequenzkurve des Filters: — berechnet, °° gemessen,  
(b) Klanganalyse des gefilterten Rauschens,  
(c) Autokorrelationsfunktion.

Dem quantitativen Vergleich der Genauigkeit der einzelnen Meßmethoden soll Tabelle II dienen, in der alle Meßergebnisse, die an LC-Filtern verschiedener Dämpfung gewonnen wurden, zusammengefaßt sind.

Wie Tabelle II zeigt, lassen sich Eigenfrequenz und Dämpfung von LC-Filtern mit dem angegebenen Autokorrelator bis auf etwa 15 % genau bestimmen. Nur bei dem am stärksten gedämpften Filter  $\eta_0 = 1,2$  treten größere Abweichungen auf. Dies wurde bei allen Filtern festgestellt, deren Frequenzbereich bis zu sehr tiefen Frequenzen reicht und ist offenbar durch die Phasendrehung der Verstärker bei sehr tiefen Frequenzen bedingt.

3. Rauschen über Rechteckfilter

Frequenzkurve des Filters:

$$Y(\nu) = A \text{ für } \nu_0 - \Delta \nu/2 < \nu < \nu_0 + \Delta \nu/2,$$

$$Y(\nu) = 0 \text{ sonst.}$$

Tabelle II

	a	° % *	b	° %	c	%
Resonanzfrequenz:						
berechnet	2820		2715		1810	
aus der Filtermessung	2820	0	2510	7,5	—**	
aus der Zählermessung	2525	10	2305	16	2080	15
Frequenz der freien Schwingung $\beta/2\pi$ :						
berechnet:	2850		2810		2440	
aus der Autokorrelationskurve:	2740	4	2460	13	1450	40
Verlustfaktor:						
berechnet:	0,28		0,50		1,2	
aus der Filtermessung:	0,30	7	0,44	12	—**	
aus der Autokorrelationskurve:	0,28	0	0,42	16	2,0	70

\* Die Prozentzahlen geben die Abweichungen der Meßwerte vom berechneten Wert an.  
\*\* Die Kurve ist so stark gedämpft, daß man aus ihr weder die Resonanzfrequenz noch die Halbwertsbreite entnehmen kann. Die Meßwerte stimmen jedoch gut mit der berechneten Kurve (Abb. 8a) überein.

Wenn  $N$  die konstante Spektraldichte des Rauschens ist, gilt

$$G(\nu) = N |Y(0)|^2 = N A^2 \text{ für } \nu_0 - \Delta\nu/2 < \nu < \nu_0 + \Delta\nu/2, \\ G(\nu) = 0 \text{ sonst.}$$

Autokorrelationsfunktion nach Gl.(20):

$$R(\tau) = \frac{N A^2}{\pi \tau} \cos 2\pi \nu_0 \tau \sin \pi \Delta \nu \tau.$$

Es wurden drei Filter untersucht:

- a) Oktavfilter  $\nu_0 = 4800$  Hz,  $\Delta\nu = 3200$  Hz,
- b) Terzfilter  $\nu_0 = 2850$  Hz,  $\Delta\nu = 700$  Hz,
- c) Tiefpaß  $\nu_{gr} = 2\nu_0 = \Delta\nu = 16$  kHz.

a) Rauschen über Oktavfilter

α) Abb. 9a zeigt die mit Sinustönen ausgemessene Frequenzkurve des Filters. Zur Bestimmung der Halbwertsfrequenzen 6305 Hz und 3100 Hz wurde der Dezimalzähler als Frequenzmesser verwendet. Daraus ergibt sich  $\nu_0 = 4702$  Hz und  $\Delta\nu = 3205$  Hz.

β) Die Klanganalyse des Rauschens zeigt Abb. 9b. Die Frequenzkurve des Filters wird auch auf diese Weise gut wiedergegeben.

γ) In Abb. 9c wurde die ausgezogene Kurve nach Formel (20) für  $\nu_0 = 4800$  Hz und  $\Delta\nu = 3200$  Hz berechnet. Die gemessenen Punkte (Kreuze für  $-\tau$  und Kreise für  $+\tau$ ) stimmen recht gut mit der berechneten Kurve überein. Als Maß für das Abklingen der Autokorrelationskurve kann das Verhältnis vom 1. Maximum zum 1. Minimum dienen. Für ein Oktavfilter ergibt sich theoretisch  $\Phi(0)/\Phi_{min} = 1,2$ , gemessen wurde  $\Phi(0)/\Phi_{min} = 1,3$ .

Aus dem Krümmungsradius im Nullpunkt berechnet sich eine mittlere Nullstellenzahl von  $10,8 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ , entsprechend einer Frequenz von 5400 Hz. Die Bestimmung des Krümmungsradius ist jedoch nicht sehr genau.

δ) Die Zählung der Nullstellen mit dem Dezimalzähler ergab  $n = (10,0 \pm 0,2) \cdot 10^3$ , d. h.  $\nu = 5,0 \pm 0,1$  kHz. Der Vergleich mit dem theoretisch zu erwartenden Wert [5]:

$$n = 2 \sqrt{\frac{\nu_b^3 - \nu_a^3}{3(\nu_b - \nu_a)}} = 9,8 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1},$$

$$\nu_b = \nu_0 + \Delta\nu/2, \quad \nu_a = \nu_0 - \Delta\nu/2$$

zeigt gute Übereinstimmung.

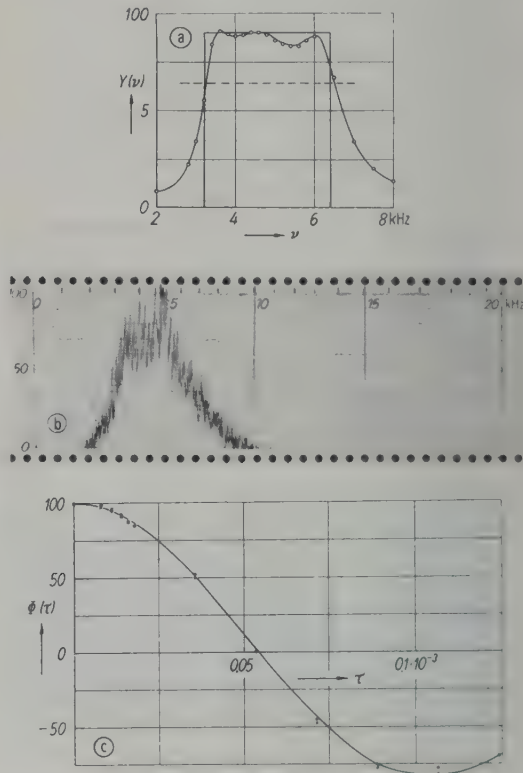


Abb. 9. Rauschen über Rechteckfilter von Oktavbreite; (a) Frequenzkurve des Filters, ... gemessen mit reinen Tönen, — zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion benutzte vereinfachte Kurve, (b) Klanganalyse des gefilterten Rauschens, (c) Autokorrelationsfunktion, — berechnet nach Abb. 9a, ... gemessen für  $+\tau$ ,  $\times \times \times$  gemessen für  $-\tau$ .

b) Rauschen über Terzfilter

α,β) Die Frequenzkurve des Terzfilters zeigt (Abb. 10a, b), daß die Flanken des Filters zwar steil sind, seine Kuppe jedoch abgerundet ist. Mit dem Dezimalzähler wurden die Frequenzen der Halbwertspunkte zu 3230 Hz und 2500 Hz bestimmt. Daraus ergibt sich eine Mittelfrequenz  $\nu_0 = 2865$  Hz und eine Bandbreite  $\Delta\nu = 730$  Hz (Sollwerte 2850 und 700 Hz).

γ) In Abb. 10c ist die gemessene Autokorrelationskurve als ausgezogene Kurve dargestellt. Sie fällt etwas schneller ab als die für das in Abb. 10a eingezeichnete ideale Rechteckfilter berechnete Autokorrelationsfunktion, deren Maxima und Minima in Abb. 10c als Kreuze eingetragen sind (die Dämpfung der Kette wurde dabei berücksichtigt). Zum Vergleich sind als Dreiecke die Extremwerte der Autokorrelationskurve bei einem Resonanzkreis gleicher Mittelfrequenz und Halbwertsbreite eingetragen. Sie klingt erheblich rascher ab als die gemessene Autokorrelationsfunktion des Terzfilters.



8) Mit dem Dezimalzähler wurde eine mittlere Nullstellenzahl von  $n = 5690 \pm 30 \text{ s}^{-1}$  gemessen. Dem entspricht eine Frequenz von  $2845 \pm 15 \text{ Hz}$ . Legt man die unter a) gemessenen Werte  $\nu_0 = 2865 \text{ Hz}$  und  $\Delta\nu = 730 \text{ Hz}$  zugrunde, so war  $n = 5,80 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  als Nullstellenzahl zu erwarten. Die Übereinstimmung ist also gut.

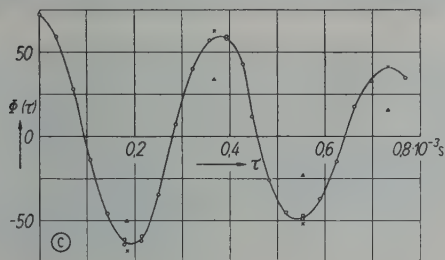
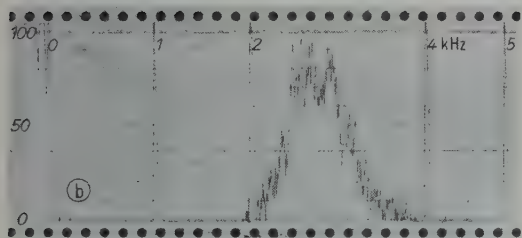
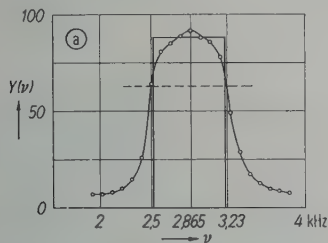


Abb. 10. Rauschen über Rechteckfilter von Terzbreite;

- Frequenzkurve des Filters, °°° gemessen mit reinen Tönen, — zur Berechnung der Autokorrelationsfunktion benutzte vereinfachte Kurve,
- Klanganalyse des gefilterten Rauschens,
- Autokorrelationsanalyse, ×× berechnet für Rechteckfilter, △△ berechnet für Resonanzkreis gleicher Frequenzbreite, °°° gemessen (Dämpfung der Kette berücksichtigt).

#### c) Rauschen über Tiefpaß

Autokorrelationsfunktion:  $\Phi(\tau) = \frac{A^2}{2\pi\tau} \sin 2\pi\nu_{gr}\tau$ .

Als Tiefpaß diente das Speichermagnetophon, dessen Übertragungskurve bei 16 kHz ziemlich steil abfällt (siehe Abb. 2).

γ) In Abb. 11 ist als ausgezogene Kurve die für einen Tiefpaß mit der Grenzfrequenz 16 kHz berechnete Autokorrelationsfunktion eingetragen, mit der die als Kreise eingetragenen Meßpunkte recht gut übereinstimmen.

8) Für die Zahl der Nullstellen ergab die Zählermessung  $n = 18 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ .

Theoretisch wäre  $n = 1,155 \nu_{gr} = 18,5 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  zu erwarten. Dieser Wert stimmt sehr gut mit dem gemessenen Wert überein.

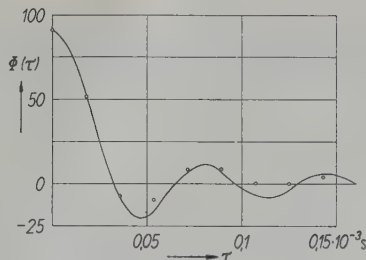


Abb. 11. Rauschen über Tiefpaß (Grenzfrequenz 16 kHz); Autokorrelationsfunktion: — berechnet, °° Meßwerte.

#### 4. Kreuzkorrelation

Während die Autokorrelation eines gefilterten Rauschens nach Gl.(6) die vereinfachte Gewichtsfunktion des Filters liefert (ohne Berücksichtigung der Phasen) erhält man die Gewichtsfunktion selbst, wenn man eine Kreuzkorrelation der Ausgangsspannung des Filters mit seiner Eingangsspannung vornimmt. Die Kreuzkorrelation stellt höhere Anforderungen an die Apparatur, denn sie erfordert zwei genau gleiche Verstärker, deren Phasendrehung auch für niedrige Frequenzen gering bleibt.

Kreuzkorrelationskurven für ein RC-Filter ( $RC = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ) und ein LC-Filter ( $\nu_r \approx 1500 \text{ Hz}$ ) zeigen die Abb. 12 und 13. Im Gegensatz zu den Autokorrelationskurven, die immer mit ihrem Maximalwert beginnen, fangen die Kreuzkorrelationskurven mit Null an und zeigen außer dem Ausschwingvorgang auch das Einschwingen des Filters.

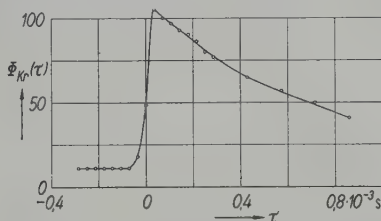


Abb. 12. Kreuzkorrelation zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung eines RC-Filters ( $RC = 0,9 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ).

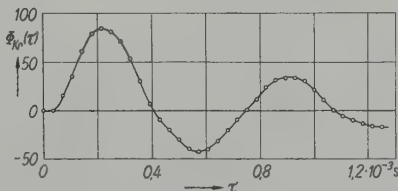


Abb. 13. Kreuzkorrelation zwischen der Eingangs- und Ausgangsspannung eines LC-Filters ( $\nu_r \approx 1500 \text{ Hz}$ ).

#### B) Lagemodulierte Impulsfolgen

Als Beispiel für einen sehr obertonreichen Vorgang wurden Impulsfolgen untersucht. Die Impulse wurden dem Dezimalzähler entnommen und konnten entweder periodisch (durch eine Sinusspannung) oder in unregelmäßiger Folge (durch Wobbel- oder Rauschspannung) ausgelöst werden. Abb. 14 zeigt die Form der Impulse am

Eingang des Multiplikators; sie konnten nicht beliebig schmal gemacht werden, weil die Laufzeitkette den Frequenzbereich bei 25 kHz begrenzte.

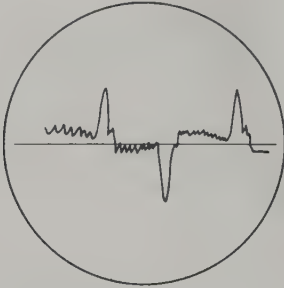


Abb. 14. Impulsform.

Den Einfluß, den die Aufeinanderfolge der Impulse auf das Fourierspektrum und die Autokorrelationsfunktion hat, zeigen die in Abb. 15 bzw. Abb. 16 dargestellten Messungen.

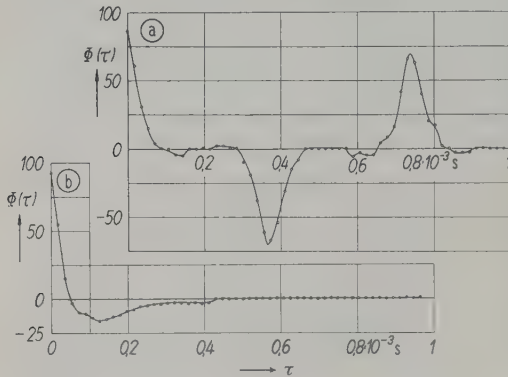


Abb. 15. Autokorrelationsfunktionen von Impulsfolgen; Auslösung der Impulse durch  
(a) Sinusspannung,  
(b) Rauschspannung.

Bei (a) sind die Impulse durch eine Sinusspannung von 1425 Hz, also rein periodisch ausgelöst worden. Die Klanganalyse (Abb. 16a) ergibt ein Spektrum aus diskreten Teiltönen, den Obertönen der Impulsfrequenz  $\nu_i$ . Die Autokorrelationsfunktion (Abb. 15a) besteht aus einzelnen Zacken, die sich periodisch nach der Verschiebungszeit  $\tau = 1/\nu_i$  wiederholen. Das Kleinerwerden der Zacken mit zunehmendem  $\tau$  ist ein Maß für die Genauigkeit, mit der die Impulsfolgefrequenz eingehalten wird. Bei regelmäßiger Impulsfolge sollten alle Zacken gleich hoch sein, die Abnahme der Maxima in Abb. 15a ist durch die Dämpfung der Laufzeitkette bedingt. Ein Vergleich mit Abb. 14 zeigt, daß die Autokorrelationsfunktion sehr große Ähnlichkeit mit der Zeitfunktion hat.

Bei Auslösung der Impulse durch einen Wobbelton ( $1400 \text{ Hz} \pm 30 \text{ Hz}$ ) ändert sich die Autokorrelationsfunktion sehr wenig, die Zacken nehmen mit wachsendem  $\tau$  etwas schneller ab als in Abb. 15a. Die Klanganalyse Abb. 16b enthält nur noch die ungeraden Teiltöne, die zudem zu schmalen Frequenzbändern auseinandergezogen sind.

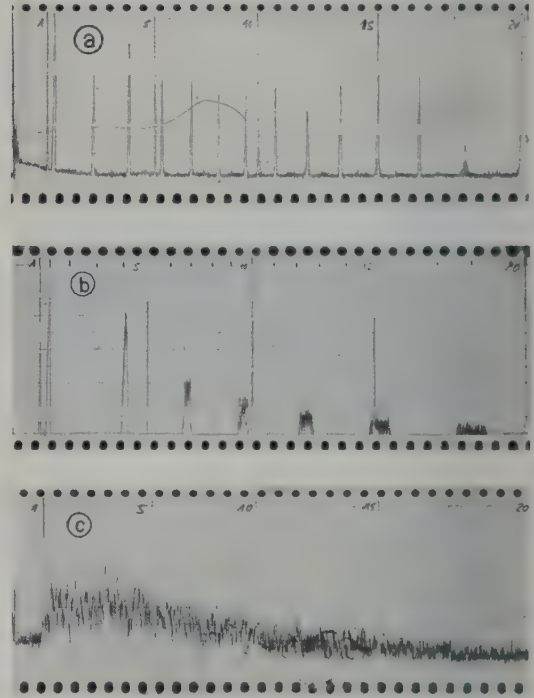


Abb. 16. Klanganalyse von Impulsfolgen; Auslösung der Impulse durch  
(a) Sinusspannung,  
(b) Wobbelton,  
(c) Rauschspannung.

Löst man die Impulse durch einen statistischen Vorgang aus (es wurde ein Rauschband der Breite  $\Delta\nu/\nu = 0,6$  benutzt, das so eingestellt wurde, daß die mittlere Impulsfolgefrequenz etwa 1380 Hz betrug), so verschwinden in der Autokorrelationsfunktion (Abb. 15b) die Zacken höherer Ordnung vollständig. Von etwa  $\tau = 400 \mu\text{s}$  an ist  $\Phi(\tau) \equiv 0$ . Die Klanganalyse Abb. 16c zeigt anstelle der diskreten Teiltöne ein breites, kontinuierliches Frequenzband, das etwa bei der mittleren Impulsfolgefrequenz beginnt und nach höheren Frequenzen sehr langsam abnimmt.

Zusammenfassend ist über die Autokorrelationsfunktion von Impulsfolgen zu sagen, daß der Abfall der Autokorrelationsfunktion bei  $\tau = 0$  durch den Gehalt der Zeitfunktion an hohen Frequenzen bedingt ist und zwar unabhängig da-



von, ob es sich um diskrete Obertöne oder breite Frequenzbänder handelt. Um festzustellen, ob es sich bei der Zeitfunktion um einen periodischen oder unperiodischen Vorgang handelt, muß die Autokorrelation bis zu größeren  $\tau$  verfolgt werden. Nur wenn die Autokorrelationsfunktion von einem bestimmten  $\tau$ -Wert an stets Null bleibt, handelt es sich bei der zugehörigen Zeitfunktion um einen unperiodischen Vorgang.

C) Additive Überlagerung eines periodischen und eines unperiodischen Zeitvorganges

Da es sich bei Sprachlauten, z. B. bei stimmhaften Konsonanten, häufig um eine Überlagerung zweier oder mehrerer Zeitvorgänge handelt, soll an einem weiteren Modellversuch gezeigt werden, wie man mit der Autokorrelationsanalyse die einzelnen Komponenten trennen kann.

Der einfachste und übersichtlichste Fall ist der der additiven Überlagerung eines reinen Sinustones  $f_s(t)$  mit einem breitbandigen Rauschen  $f_r(t)$ . Die Autokorrelationsfunktion ist in diesem Fall [2]

$$\Phi(\tau) = \lim_{T \rightarrow \infty} \frac{1}{T} \int_{-T}^{+T} [f_s(t) + f_r(t)][f_s(t \pm \tau) + f_r(t \pm \tau)] dt$$
$$= \Phi_{ss}(\tau) + \Phi_{rr}(\tau) + \Phi_{sr}(\tau) + \Phi_{rs}(\tau).$$

Die beiden Glieder mit gemischtem Index fallen weg, weil die Kreuzkorrelation zweier unkohärenter Vorgänge Null ist. Die Autokorrelation der Summe zweier unkohärenter Vorgänge ist also gleich der Summe ihrer Autokorrelationsfunktionen. Speziell gilt bei  $\tau = 0$

$$\Phi(0) = \Phi_{ss}(0) + \Phi_{rr}(0) = \overline{f_s^2(t)} + \overline{f_r^2(t)},$$

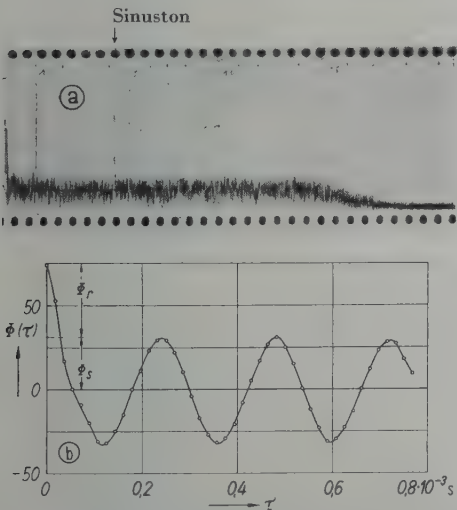


Abb. 17. Sinuston mit überlagertem Rauschen;  
(a) Klanganalyse,  
(b) Autokorrelationsanalyse.

d. h. bei  $\tau = 0$  kann man dem Autokorrelationsdiagramm die quadratischen Mittelwerte der Zeitfunktionen entnehmen.

Als Beispiel zeigen Abb. 17a und Abb. 17b das Frequenzspektrum und die Autokorrelationsfunktion eines Gemisches aus Rauschen und einem Sinuston von etwa 4 kHz. Beide Geräusche wurden so einreguliert, daß sie einzeln auf einem Röhrevoltmeter mit linearer Gleichrichtung den gleichen Ausschlag verursachten. Nach BERANEK [8] verhalten sich dann ihre quadratischen Mittelwerte wie

$$\overline{f_r^2(t)} / \overline{f_s^2(t)} = 1,3.$$

Aus dem Autokorrelationsdiagramm kann man das Energieverhältnis sofort ablesen:

$$\frac{\Phi_r(0)}{\Phi_s(0)} = \frac{\overline{f_r^2(t)}}{\overline{f_s^2(t)}} = \frac{74 - 31}{31} = 1,4.$$

Um die Anteile des Sinustones und des Rauschens aus dem Frequenzspektrum zu berechnen, muß man die Filterbreite des Klanganalysators und die Bandbreite des Rauschens kennen, sie betragen im vorliegenden Fall 15 Hz bzw.

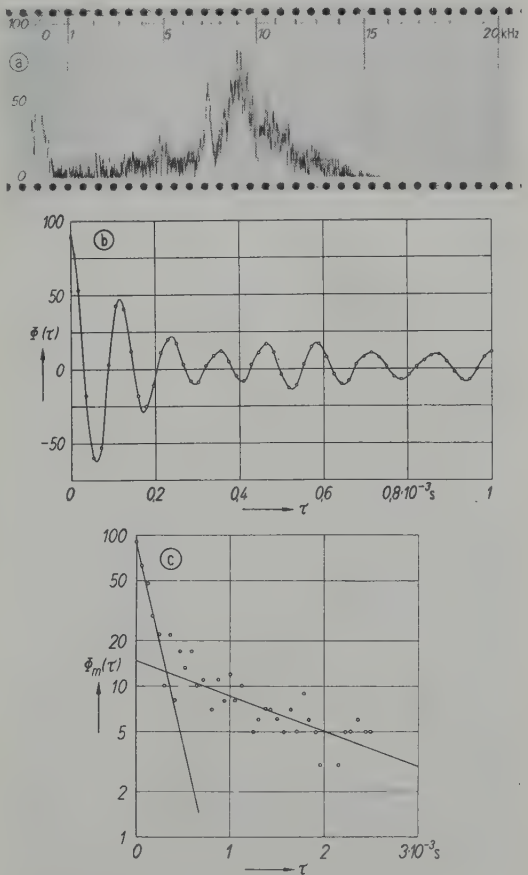


Abb. 18. Analyse einer Zeitfunktion, die aus zwei schmalen Frequenzbändern besteht (stimmloses s);  
(a) Klanganalyse,  
(b) Autokorrelationsfunktion (linearer Maßstab),  
(c) Extremwerte der Autokorrelationsfunktion in logarithmischem Maßstab.

16 kHz. Damit ergibt sich aus Abb. 17a

$$\frac{\overline{f_r^2(t)}}{\overline{f_s^2(t)}} = 1,5.$$

Bei einer zweiten Messung, bei der die Energie des Sinustones nur etwa ein Viertel der Energie des Rauschens betrug, ergaben sich folgende Werte für das Verhältnis der beiden Energien: theoretisch 5,0, Autokorrelationsanalyse 4,8 und Klanganalyse ebenfalls 4,8. Die Genauigkeit der Messung ist bei beiden Verfahren etwa gleich.

Bei stimmlosen Konsonanten hat man es nicht mit der Überlagerung eines reinen Sinustones und eines sehr breitbandigen Rauschens, sondern häufig mit der Überlagerung zweier relativ schmaler, aber kontinuierlicher Frequenzbänder zu tun. Als Beispiel dient eine Aufnahme des stimmlosen „s“, dessen Klanganalyse Abb. 18a und dessen Autokorrelationsfunktion Abb. 18b darstellt. Wenn man aus dem Frequenzspektrum entnehmen will, welcher Anteil der Gesamtenergie auf die schmale Spitze bei 7 kHz entfällt und welcher Energieanteil dem breiten Frequenzbereich bei 9 kHz zukommt, so muß man die Flächen unter diesen Spitzen mit einem quadrierenden Planimeter ausmessen. Diese Messung, die an einer vergrößerten Aufnahme von Abb. 18a ausgeführt wurde, ergab für das Verhältnis der Energien  $N_{9\text{kHz}}/N_{7\text{kHz}} = 6,2$ .

Die Trennung der beiden Autokorrelationsfunktionen gelingt leicht, wenn man die Maxima und Minima der gemessenen Autokorrelationsfunktion im logarithmischen Maßstab aufträgt (Abb. 18c). Trotz der großen Streuung der Meßwerte lassen sich leicht zwei Geraden einzeichnen, die den exponentiellen Abfall der beiden Schwingungen charakterisieren. Die steile Gerade entspricht dem breiten Frequenzband, die flache dem schmalen. Aus den Schnittpunkten der Geraden mit der Ordinatenachse liest man für das Verhältnis der Energie der breiten Zacke bei 9 kHz zu der der schmalen Zacke bei 7 kHz ab:

$$\frac{\Phi_{9\text{kHz}}(0)}{\Phi_{7\text{kHz}}(0)} = \frac{90 - 14,5}{14,5} = 5,3.$$

Die Übereinstimmung der beiden Werte ist befriedigend in Anbetracht dessen, daß die Planimetermessung nicht sehr genau ist.

#### D) Stimmlose und stimmhafte Zischlaute

Stimmlose Zischlaute bestehen aus mehr oder weniger breiten, kontinuierlichen Frequenzbändern, deren Form wesentlich von der Mundstellung abhängt. Wenn man z. B. den Mund in eine u-Stellung bringt, während man den Zischlaut ausspricht, so enthält dieser meist nur ein einziges, relativ schmales Frequenzgebiet.

Stimmhafte Zischlaute haben im wesentlichen das gleiche Frequenzspektrum wie die entsprechenden stimmlosen Laute, nur daß additiv der meist sehr viel energiereichere, rein periodische Stimmtön hinzukommt.

Nach MEYER-EPPLER [9] definiert man als Maß für den Grad der Stimmhaftigkeit  $S$  eines Lautes das Verhältnis

$$S = \sqrt{\Phi_p(0)/\Phi(0)},$$

wobei  $\Phi_p(0)$  die Autokorrelationsfunktion des periodischen Anteils und  $\Phi(0)$  die des Gesamtlautes ist, beide bei  $\tau = 0$  genommen.

Der zu untersuchende Zischlaut wurde auf eine endlose Tonbandschleife von etwa 1 m Länge so aufgesprochen, daß er das Band bis auf die unvermeidliche Lücke von 5 % der Bandlänge ausfüllte. Bei der Bestimmung der Zahl der Nullstellen mit dem Zähler wurde die Lücke der Aufzeichnung dadurch berücksichtigt, daß über eine längere, mit der Stoppuhr gemessene Zeit (etwa 10 Bandumläufe) gezählt und die angezeigte Zahl der Nullstellen mit dem Faktor 1,05 multipliziert wurde.

Im folgenden soll aus der großen Zahl der Messungen für jeden der untersuchten Zischlaute (Tabelle III) ein Beispiel besprochen werden. Ferner soll versucht werden, charakteristische Eigenschaften der einzelnen Laute herauszufinden.

Tabelle III  
Liste der untersuchten Zischlaute

1. sch	f	(Schuh)	} stimmlos
2. s	s	(Gasse)	
3. f	f	(fein)	
4. sch	z	(Journal)	} stimmhaft
5. s	z	(Sonne)	
6. w	v	(Wein)	

#### Stimmlose Zischlaute

##### 1. Stimmloses „sch“

a) Die Klanganalyse (Abb. 19a) des Lautes ergibt ein kontinuierliches Spektrum ohne diskrete Linien. Es besitzt zwei bevorzugte Frequenzgebiete, eine hohe, relativ schmale Spitze bei 5,3 kHz (Halbwertsbreite etwa 300 Hz) und eine kleinere Spitze bei 1,2 kHz.

β) Die Autokorrelationskurve (Abb. 19b) hat die Form einer gedämpften Kosinusschwingung. Aus dem Abstand der ersten sechs Maxima ergibt sich eine Periode  $\tau = 185 \mu\text{s}$ , entsprechend einer Frequenz von 5,4 kHz (Klanganalyse 5,3 kHz). Der Hauptperiode ist eine kleine Nebenperiode überlagert, deren Periode sich aus Abb. 19b zu etwa  $740 \mu\text{s}$  ergibt (1,3 kHz). Sie entspricht der kleinen Spitze bei 1 kHz in Abb. 19a. Zur Bestimmung der Halbwertsbreite der Grundperiode wurden die Extremwerte der Autokorrelationsfunktion in Abb. 19c logarithmisch aufgetragen. Trotz der erheblichen Streuung der Meßpunkte (hervorgehoben durch die überlagerte Nebenperiode) kann man sehen, daß die Punkte etwa auf einer Geraden liegen, daß also die Autokorrelationsfunktion exponentiell abklingt und nicht nach der Spaltfunktion  $\frac{\sin a\tau}{a\tau}$ . Daraus kann geschlossen

werden, daß der Resonator, den die Mundhöhle beim Sprechen des sch-Lautes bildete, die Eigenschaften eines einfachen Masse-Feder-Systems hatte und nicht etwa ein Filter mit rechteckig begrenztem Frequenzbereich war. Die Halbwertsbreite des Resonators berechnet sich aus dem Abfall der Autokorrelationsfunktion unter Berücksichtigung der Verluste der Laufzeitkette zu 360 Hz (Klanganalyse 300 Hz). Der Punkt  $\Phi(\tau = 0)$  liegt eindeutig oberhalb der Geraden, die durch die übrigen Meßpunkte gelegt wurde. Diese Tatsache deutet darauf hin, daß außer den beiden bevorzugten Frequenzgebieten bei 1,2 und 5,4 kHz noch ein breiter Rauschuntergrund vorhanden ist, dessen Autokorrelationsfunktion so rasch abfällt, daß er auf die



übrigen Meßpunkte keinen Einfluß mehr hat. In diesem Rauschuntergrund, der auch auf dem Frequenzdiagramm (Abb. 19a) zu sehen ist, stecken, wie man aus dem Autokorrelogramm sofort ablesen kann, etwa 35 % der Gesamtenergie des Zischlautes.

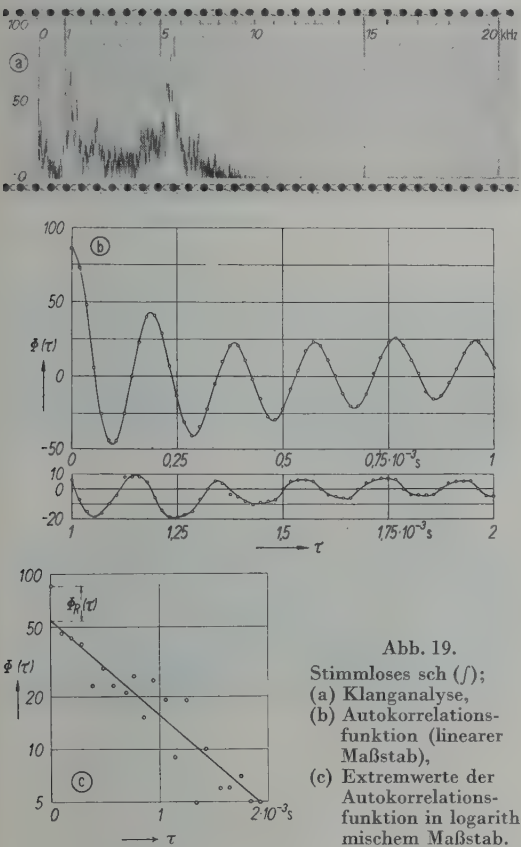


Abb. 19.  
Stimmloses sch (f);  
(a) Klanganalyse,  
(b) Autokorrelationsfunktion (linearer Maßstab),  
(c) Extremwerte der Autokorrelationsfunktion in logarithmischem Maßstab.

$\gamma$ ) Bei der Messung mit dem Dezimalzähler ergab sich eine mittlere Nullstellenzahl von  $9,8 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ , entsprechend einer Schwerpunktsfrequenz von 4,9 kHz. Dieser Wert liegt um etwa 8 % niedriger, als man nach den Messungen  $\alpha$ ) und  $\beta$ ) erwarten sollte.

Messungen an anderen sch-Lauten, die zum Teil von einer Person bei verschiedener Mundstellung und zum Teil von sieben verschiedenen Personen gesprochen wurden, zeigten folgende gemeinsame Eigenschaften, die für den sch-Laut charakteristisch zu sein scheinen:

Das Frequenzspektrum besitzt häufig zwei bevorzugte Frequenzgebiete mit einer Breite von je etwa 500 Hz. Das obere Gebiet liegt meist bei 5–6 kHz, das untere bei 1–3 kHz. Da beim Sprechen des sch-Lautes durch die Zungenstellung im Mund zwei Hohlräume entstehen, handelt es sich möglicherweise um Resonanzen dieser beiden Hohlräume.

## 2. Stimmloses „s“

Die Untersuchungen an einem stimmlosen „s“-Laut (Abb. 18a, b, c) wurden bereits im vorigen Kapitel diskutiert. Es seien deshalb hier nur die nach den verschiedenen Verfahren gewonnenen

Werte für die Schwerpunktsfrequenzen und Dämpfungen der beiden bevorzugten Frequenzgebiete zusammengestellt.

$\alpha$ ) Klanganalyse:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 7,0 \text{ kHz}, & \Delta \nu_1 / \nu_1 &= 200 \text{ Hz}, \\ \nu_2 &= 8,8 \text{ kHz}, & \Delta \nu_2 / \nu_2 &= 1500 \text{ Hz}; \end{aligned}$$

$\beta$ ) Autokorrelation:

$$\begin{aligned} \nu_1 &= 7,4 \text{ kHz}, & \Delta \nu_1 / \nu_1 &= 160 \text{ Hz}, \\ \nu_2 &= 8,7 \text{ kHz}, & \Delta \nu_2 / \nu_2 &= 2000 \text{ Hz}. \end{aligned}$$

$\nu_2$  wurde aus dem Abstand der ersten Maxima des Autokorrelogramms,  $\nu_1$  aus dem Abstand der letzten der 19 gemessenen Maxima berechnet. (In Abb. 18b sind nur die ersten acht Perioden eingezeichnet.)

$\gamma$ ) Zählermessung: Der Zähler unterscheidet natürlich nicht zwischen den beiden Frequenzgebieten. Es wurden  $18 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$  Nullstellen gezählt, das entspricht einer Schwerpunktsfrequenz von 9 kHz. Die Messungen  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\gamma$  sind also, besonders was die Frequenzen<sup>5</sup> anbelangt, in guter Übereinstimmung miteinander.

Gemeinsam ist fast allen s-Spektren (gesprochen von sieben verschiedenen Sprechern), daß Frequenzen unter 5 kHz und über 10–12 kHz vollkommen fehlen. Zwischen 5–10 kHz liegt ein scharf begrenztes, sehr zerklüftetes Frequenzband, das offenbar aus mehreren, relativ schmalen Frequenzbändern besteht. In Übereinstimmung damit hat das Autokorrelogramm von s-Lauten meist einen relativ ungedämpften Charakter.

## 3. Stimmloses „f“

$\alpha$ ) Die Klanganalyse (Abb. 20a) ergibt ein sehr breites, kontinuierliches Spektrum, das praktisch den ganzen untersuchten Frequenzbereich (bis 16 kHz) ausfüllt. Einzelne, zum Teil sehr schmale Spitzen ragen etwas aus dem Rauschband hervor.

$\beta$ ) Die Autokorrelationsfunktion (Abb. 20b zeigt einen Ausschnitt von  $0 \dots 1 \cdot 10^{-3} \text{ s}$ ) ist außerordentlich stark gedämpft. Beim zweiten Maximum ( $\tau = 86 \mu\text{s}$ ) beträgt die Autokorrelationsfunktion nur noch 10 % des Wertes  $\Phi(0)$ . Für  $\tau > 100 \mu\text{s}$  ist die Autokorrelationsfunktion eine sehr schwach gedämpfte, etwas unregelmäßige Kosinusfunktion, deren Periode einer Frequenz von etwa 11 kHz entspricht. Die Welligkeit ist selbst bei  $\tau = 2000 \mu\text{s}$  noch nicht vollständig abgeklungen. Welcher Zacke des Spektrums diese sehr ungedämpfte Schwingung entspricht, konnte nicht geklärt werden. Die logarithmische Darstellung der gemessenen Autokorrelationsfunktion zeigte, daß in dieser periodischen Komponente nur etwa 8 % der Gesamtenergie enthalten sind.

$\gamma$ ) Zählermessung: Die mittlere Zahl der Nullstellen betrug  $19,6 \cdot 10^3 \text{ s}^{-1}$ , d. h. der Frequenzschwerpunkt lag bei etwa 10 kHz.

Bezeichnend für alle untersuchten f-Laute (sieben verschiedene Sprecher) war das breite Frequenzband bzw. die rasch abfallende Autokorrelationsfunktion. Durch geeignete Mundstellung können zwar einzelne Frequenzgebiete hervorgehoben werden, doch sinkt der Anteil des breiten Bandes an der Gesamtenergie selten unter 75 %.

<sup>5</sup> Der in Kapitel 4 A erwähnte Unterschied zwischen der mit der Klanganalyse und mit der Autokorrelationsanalyse gemessenen charakteristischen Frequenz kann hier unberücksichtigt bleiben.

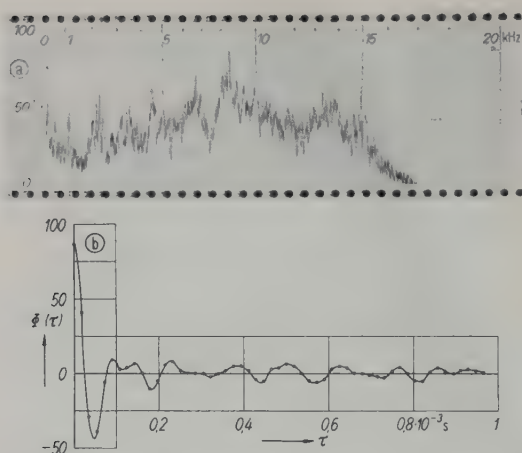


Abb. 20. Stimmloses f;  
(a) Klanganalyse,  
(b) Autokorrelationsfunktion.

### Stimmhafte Zischlaute

#### 4. Der „3“-Laut (stimmhaftes sch, wie in Journal)

$\alpha$ ) Das Spektrum des stimmhaften Lautes 3 (Abb. 21a) besteht aus einem kontinuierlichen Anteil der dem Spektrum des entsprechenden stimmlosen Lautes „sch“ gleicht und den diskreten Linien des Stimmtons und seiner Ober-

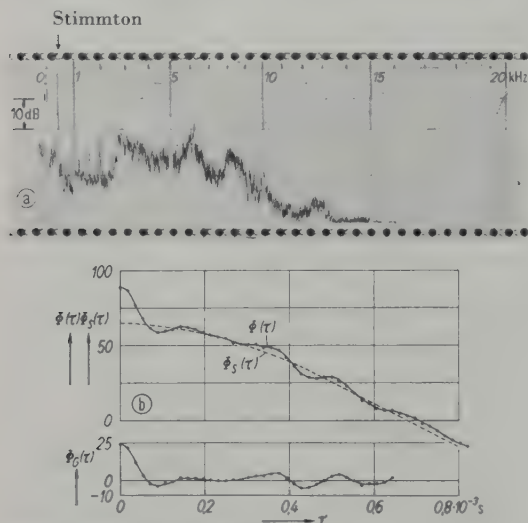


Abb. 21. Stimmhaftes sch (3);  
(a) Klanganalyse (logarithmischer Maßstab),  
(b) oben: gemessene Autokorrelationskurve,  
unten: Autokorrelationsfunktion  $\Phi_G$  des Geräuschanteils (Anteil des Stimmtons  $\Phi_S$  abgezogen).

töne. (Die Amplitude des Stimmtones ist sehr viel größer als die des Rauschanteils, so daß das Spektrum Abb. 21a im logarithmischen Maßstab aufgetragen werden mußte.) Der Stimmtön liegt genau bei 390 Hz (mit dem Dezimalzähler bestimmt), die bevorzugten Frequenzgebiete des Rauschanteils bei 2,5 und 6 kHz.

$\beta$ ) In Abb. 21b ist die gemessene Autokorrelationsfunktion dargestellt, die sich aus drei Kurven additiv zusammensetzt. In einfacher Weise läßt sich eine Kosinuskurve der Periode  $\tau = 2600 \mu s$  ( $\nu = 382 \text{ Hz}$ ) abspalten, die dem Stimmtön ( $\Phi_S(\tau)$  in Abb. 21b) entspricht. Der Rest der Autokorrelationskurve (Abb. 21b unten) zerfällt in einen periodischen Anteil mit  $\tau = 162 \mu s$  (6,2 kHz) und einen Geräuschanteil. Die Gesamtenergie verteilt sich, wie man aus Abb. 21b abliest, in folgender Weise: Stimmtön 73 %, Frequenzband bei 6 kHz 5 %, Geräuschanteil 22 %. Der Grad der Stimmhaftigkeit ist

$$S = \sqrt{65/89} = 0,85.$$

$\gamma$ ) Die Bestimmung der Nullstellen mit dem Dezimalzähler versagt hier wie bei allen stimmhaften Lauten, weil sich die relativ kleine Geräuschkomponente neben dem starken Stimmtön nicht einwandfrei erfassen läßt.

#### 5. Stimmhaftes „s“

$\alpha$ ) Die Klanganalyse (Abb. 22a) zeigt auch hier neben den diskreten Linien des Stimmtons und seiner Obertöne ein kontinuierliches Spektrum, das dem eines stimmlosen s sehr ähnlich sieht. Das bevorzugte Frequenzgebiet liegt bei 9 kHz und hat eine Halbwertsbreite von ungefähr 1,6 kHz. Die Frequenz des Stimmtons, die mit dem Dezimalzähler bestimmt wurde, betrug 350 Hz.

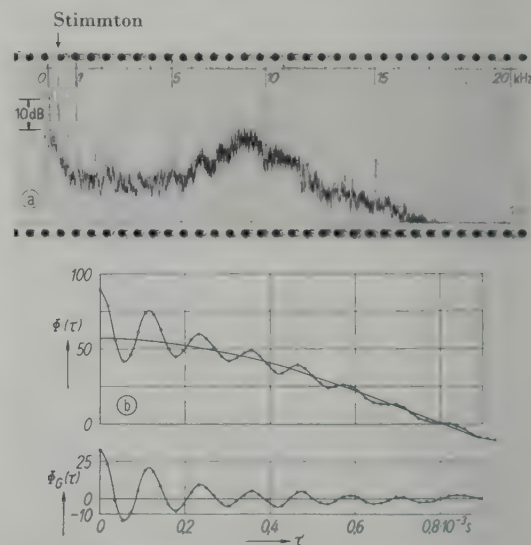


Abb. 22. Stimmhaftes s (z);  
(a) Klanganalyse (logarithmischer Maßstab),  
(b) oben: gemessene Autokorrelationskurve,  
unten: Autokorrelationskurve des Geräuschanteils.

$\beta$ ) Die Autokorrelationskurve (Abb. 22b) läßt sich leicht in zwei Kurven aufspalten, von denen die mit der längeren Periode,  $3100 \mu s$  (322 Hz), dem Stimmtön entspricht, während die andere eine gedämpfte Kosinusfunktion der Periode  $\tau = 115 \mu s$  (8,7 kHz) darstellt. Die aus der Dämpfung dieser Schwingung berechnete Frequenzbandbreite beträgt 1,5 kHz. Die aus der Autokorrelationsfunktion berechneten Daten der beiden Schwingungen stimmen also sehr gut mit den Ergebnissen der Klanganalyse überein. Der Grad der Stimmhaftigkeit des Lautes läßt sich am einfachsten aus der Autokorrelationskurve ablesen:

$$S = \sqrt{57/89} = 0,80.$$



6. Stimmhaftes „w“

α) Im Spektrum herrscht eine sehr starke, diskrete Linie bei 335 Hz (Abb. 23a) vor. Der Geräuschanteil ist ein sehr schwaches Rauschband, das über den ganzen Frequenzbereich der Apparatur reicht.

β) Die gemessene Autokorrelationskurve (Abb. 23b) zeigt den gleichen Tatbestand. Der Stimmton hat eine Periode  $\tau = 3200 \mu s$  (310 Hz) und beansprucht 96 % der Gesamtenergie. Ihm ist eine sehr stark gedämpfte Kosinusschwingung überlagert, deren Periode etwa  $\tau = 70 \mu s$  (14 kHz) beträgt.

Stimmhaftigkeit:

$$S = \sqrt{90/94} = 0,98.$$

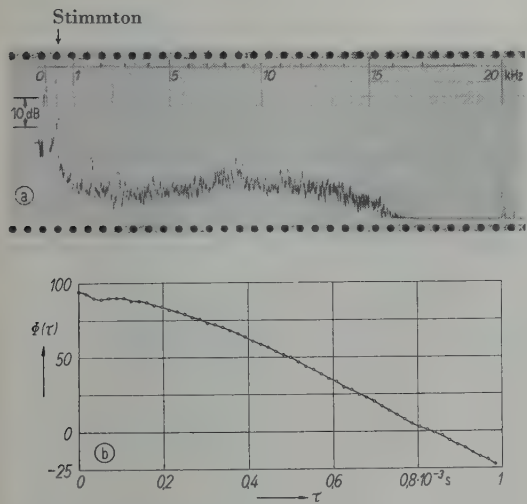


Abb. 23. Stimmhaftes w (v);  
(a) Klanganalyse (logarithmischer Maßstab),  
(b) Autokorrelationsfunktion.

Kurze Zischlaute

Neben ausgehaltenen Zischlauten wurden auch einige kurz gesprochene stimmlose Zischlaute untersucht. Die Autokorrelationskurven zeigten große Ähnlichkeit mit denen der entsprechenden ausgehaltenen Laute. Charakteristische Unterschiede konnten nicht festgestellt werden.

Herrn Professor Dr. E. Meyer danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für seine wertvollen Ratschläge.

(Eingegangen am 29. Juli 1953.)

Schrifttum

[1] STEVENS, K.N., Autocorrelation analysis of speech sounds. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 769.  
[2] LEE, Y.W. und WIESNER, J.B., Correlation functions and communication application. Electronics **23** [1950], Juniheft, 86.  
[3] JAMES, H.M., NICHOLS, N.B. und PHILLIPS, R.S., Theory of servomechanisms. McGraw-Hill Book Co., New York 1947, Kap. 6.  
[4] CHANG, S.H., PIHL, G.E. und ESSIGMANN, M.W., Representations of speech sounds and some of their statistical properties. Proc. Instn. Radio Engrs. **39** [1951], 147.  
[5] RICE, S.O., Mathematical analysis of random noise. Bell Syst. tech. J. **23** [1944], 282; **24** [1945], 46.  
[6] FANO, R.M., Short time autocorrelation functions and power spectra. J. acoust. Soc. Amer. **22** [1950], 546.  
[7] TAMM, K. und PRITSCHING, I., Frequenzanalysator mit mechanischem Hochtonfilter. Acustica **1** [1951], Beiheft 1, AB 43.  
[8] BERANEK, L.L., Acoustic measurements. J. Wiley & Sons, New York 1949, S. 453.  
[9] MEYER-EPPLER, W., Übersicht über die Verfahren zur Charakterisierung aleatorischer Schallvorgänge und deren Anwendbarkeit auf Geräuschlaute. Z. Phonetik u. allgem. Sprachwissenschaft **6** [1952], 269.

BOOKREVIEW

**Audiotecnica News** — Revue du Centre Audiotecnique International — Direction: Via Garibaldi 25, Torino, Italie — Rédaction: 1285 Homer Street, Vancouver 3 B. C., Canada —  $21 \times 28,5 \text{ cm}^2$ , 118 pages Vol. **1**, nr 1 (October, November, December 1953).

This new periodical presents itself as the official publication of the "Centre Audiotecnique International". Its first issue comprises part of the proceedings of the Sanremo Congress (1952), the second will give the rest of the proceedings.

The aim of the organisers is a good one: noise abatement everywhere. The names of members of the Honorary Committee and of lecturers—not given here since they might feel compromised—raise the expectation that the present issue is a carefully prepared document of a major event in the field. We regret to say that in our opinion this expectation is dashed at the first glance at the contents. The articles published are of no scientific value; they are almost completely propagandist in character. Even worse, how-

ever, is the fact that it is almost impossible for others than Italians to grasp their meaning.

The journal is "multilingual" in the sense that many languages are supposed to be used. As an example of translation technique I quote words of the Adjoint au Maire de Nice which read in French: "... les conclusions techniques permettront — nous le souhaitons tous — d'atténuer — sinon de supprimer — les bruits industriels", translated into: "Die technischen Abschlüsse die Sie genommen haben wollen wir hoffen die Industriel Lärmer vermindert wenn nicht abschaffen". If this iteration process had been repeated three times the speaker might have pronounced unwillingly his own sentence of death! It is astonishing indeed to read that the Congress was held under the auspices of U.N.E.S.C.O. and that the journal seems to be sponsored by the Italian national committee of this international organisation. I would stress the fact that the names of our esteemed Italian colleagues in the field of acoustics are not to be found in the journal.

C. W. Kosten

# MEASUREMENTS OF SOUND ABSORPTION IN AQUEOUS SOLUTIONS OF ELECTROLYTES

by K. TAMM and G. KURTZE

assisted by R. KAISER

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

## Summary

In continuation of our investigations on sound absorption in aqueous solutions of electrolytes, the frequency range of 5 kc/s...100 Mc/s has been extended to 300 Mc/s by a new apparatus using pulses. The results for the most interesting electrolytes are given.

To confirm our explanation for the electrolyte absorption, experiments have been made with respect to the influence of incomplete dissociation by using either electrolytes with well-known incomplete dissociation in water or solvents with a lower dielectric constant. The results given are in agreement with our explanation.

In a short theoretical consideration formulae are given which allow the calculation of the maximum "absorption volume"  $(Q\lambda)_{\max}$  and the relaxation frequency from the dissociation constant and the partial molar volumes of the reacting ions.

## Sommaire

Nous avons poursuivi nos études sur l'absorption du son dans les solutions aqueuses d'électrolytes, en étendant jusqu'à 300 MHz la gamme des fréquences étudiées précédemment (5 kHz à 100 MHz), au moyen d'un nouveau dispositif à impulsions. On indique les résultats obtenus avec les électrolytes les plus intéressants.

Pour confirmer notre interprétation de l'absorption dans les électrolytes, nous avons fait des essais tendant à mettre en évidence l'influence d'une dissociation incomplète, en employant des électrolytes dont le taux de dissociation dans l'eau est connu, ou des solvants de plus faible constante diélectrique. Les résultats obtenus sont en bon accord avec notre interprétation.

On donne, à la suite de brèves considérations théoriques, des formules permettant de calculer le «volume d'absorption» maximum  $(Q\lambda)$  et la fréquence de relaxation, à partir de la constante de dissociation et des volumes moléculaires partiels des ions entrant en réaction.

## Zusammenfassung

Zur Ergänzung unserer Untersuchungen der Schallabsorption in wäßrigen Elektrolytlösungen wurde der bisherige Frequenzbereich von 5 kHz...100 MHz mit Hilfe einer neuen Apparatur nach dem Impulsverfahren bis zu 300 MHz ausgedehnt. Die Ergebnisse für eine Reihe interessierender Elektrolyte werden mitgeteilt.

Zur Prüfung unserer Erklärung für die Elektrolytaborption wurde die unvollständige Dissoziation herangezogen, indem entweder Elektrolyte verwendet wurden, die bereits in Wasser bekanntermaßen unvollständig dissoziieren, oder Lösungsmittel mit kleiner Dielektrizitätskonstante. Die angeführten Ergebnisse sind in Übereinstimmung mit unserer Erklärung.

In einer kurzen theoretischen Betrachtung werden Formeln zur Berechnung der Relaxationsfrequenz und des maximalen „Absorptionsvolumens“  $(Q\lambda)_{\max}$  aus der Dissoziationskonstante und den partiellen Molvolumina der reagierenden Ionen angegeben.

## 1. Introduction

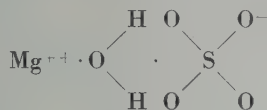
In an earlier paper [1] the results of absorption measurements in electrolytes taken in the frequency range  $3 \cdot 10^3$ ... $10^8$  c/s have been given. It turned out that the frequency variation of the absorption of the 2,2-valent electrolytes especially in aqueous solution yields some knowledge about the structure of the solutions as well as about the kinetics of ion reactions. All the frequency response curves of the product  $Q \cdot \lambda$  (absorption cross-section  $\times$  wavelength) show a relaxation

maximum within the above mentioned frequency range and a second increase with frequency indicating a second relaxation maximum at a frequency above this range. From these absorption-frequency curves and from the results of various other experiments an attempt was made to explain the mechanism of the electrolyte absorption.

From our present state of knowledge this explanation for the absorption of the 2,2-valent electrolytes seems to be very satisfactory because it agrees very well with all our measured results. It consists of two assumptions: *Incomplete dis-*



sociation and the existence of  $\text{MeR} \cdot \text{H}_2\text{O}$ -complexes (Me = metal, R = radical), e. g. of the form

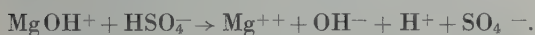


which perhaps represent the normal undissociated state of the electrolyte. For this complex two different possibilities of dissociation can be assumed:

A) The formation of two univalent ions

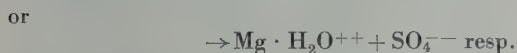


which each split up in a subsequent step



Beside the first step, which is assumed to be acoustically inefficient, we therefore have two different dissociation processes which are independent of each other and which cause one relaxation maximum each. The lower maximum is ascribed to the dissociation of  $\text{MgOH}^+$  and the higher one to  $\text{HSO}_4^-$ .

B) A separation either of the metal-ion or of the radical-ion from the complex in the form



These last two kinds of separation have different activation energies. The first one with the higher activation energy would correspond to the lower, the second one to the higher relaxation frequency.

In principle the two possibilities A and B are equivalent, although the processes B cannot yield exactly the same activation energies as A. For B an influence of the other ion partner should be measurable, i. e.  $\text{MgSO}_4$  and  $\text{MgCrO}_4$  for instance should differ a little in their lower relaxation frequency which is determined by the activation energy. Since there is really a slight difference this is an argument for the process B, but a decision cannot be made with certainty.

As mentioned above, the higher relaxation frequency of the 2,2-valent electrolytes was not known up to the present, but was only indicated by a second increase of  $Q \cdot \lambda$  with frequency. Furthermore with all salts of minor valency, as far as they show absorption at all, a linear increase of  $Q \cdot \lambda$  with frequency was observed without a maximum within the above mentioned frequency range. These facts made it desirable to extend the measuring range as far as possible to higher frequencies.

## 2. Measurements in the frequency range 100...300 Mc/s

### a) Method of measurement

The optical method applied in the frequency range 1...100 Mc/s, the advantage of which is the continuous recording of the sound intensity as a function of distance, cannot be used at higher frequencies for two reasons: 1) the sound intensity necessary to generate a sufficiently bright diffraction pattern increases with frequency to very high values; 2) the attenuations to be measured are high and the measuring distance correspondingly small, so that an optical indication is difficult.

Therefore a pulse method has been chosen. A quartz transmitter radiates pulses of the required frequency into the liquid. After their path through the liquid the pulses meet a second quartz acting as a receiver. The measured amplitude as a function of distance gives the absorption. Owing to the high attenuations (the attenuation of pure water amounts to about 200 dB/cm at 300 Mc/s) a minimum measuring distance of a few tenths of a millimeter is necessary. If the two quartz crystals are arranged at such a small distance an electrical cross-talking is unavoidable. Rods of fused quartz therefore have been established between the transmitting as well as the receiving quartz and the liquid as can be seen from Fig. 1. The measuring distance between the two rods can be altered by means of a micrometer screw which moves the upper rod together with the receiver.

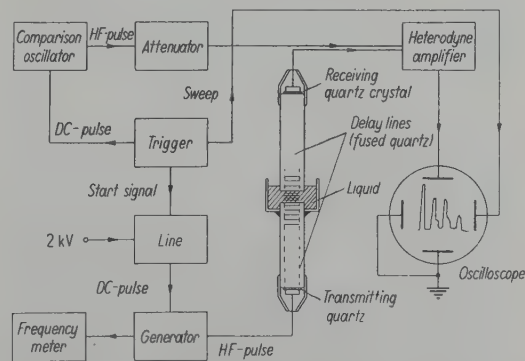


Fig. 1. Block diagram of the apparatus using sound pulses for measuring sound absorption in liquids in the frequency range 100...300 Mc/s.

The crystals are tuned to a basic frequency of about 20 Mc/s which corresponds to a thickness of about 0.14 mm. The crystals and the ends of the quartz rods are ground with an accuracy of  $\pm 5 \mu\text{m}$  plane parallel so that the crystals can be used up to their 15<sup>th</sup> harmonic i. e. 300 Mc/s.

To avoid standing waves in the quartz rods the length of the pulses is restricted to less than the delay time of the rods which are 7 cm long. Practically pulses of about 6  $\mu$ s have been used with a repetition frequency of 50 per second.

A scheme of the whole apparatus is given in Fig. 1. The oscillator is a push-pull oscillator tuned by Lecher wires, the plate voltage of which is independent of the qualities of the amplifier, the comparison pulse, generated by a special oscillator and adjustable with a calibrated attenuator, is given to the same amplifier.

The amplifier is a common heterodyne amplifier, the output voltage of which is given to an oscilloscope, where the amplitude of the received pulse is measured by comparison. In order to be independent of the qualities of the amplifier, the comparison pulse, generated by a special oscillator and adjustable with a calibrated attenuator, is given to the same amplifier.

For the measurements the comparison pulse is now made equal to the received pulse by means of the attenuator, the position of which is a relative measure for the sound pressure at the measuring distance. Measurements at different distances then yield the absorption coefficient. The accuracy of this method depends on the number of measurements taken and can amount to 5%.

### b) Results of the measurements

Measurements have been made with all substances for which from our former investigations interesting results could be expected in this range. There are at first some divalent sulphates and sulphuric acid which are of special interest because the second relaxation maximum—expected to be due to the dissociation of  $\text{HSO}_4^-$  or some similar process—had not yet been found. The results are given in Fig. 2a...e. In the usual way the product  $Q \cdot \lambda$  (absorption cross-section  $\times$  wavelength) which is proportional to  $\alpha/\nu$  (absorption coefficient/frequency) is plotted against frequency. The maximum is found at about 200 Mc/s for  $\text{MgSO}_4$ ,  $\text{CoSO}_4$  and  $\text{ZnSO}_4$  with a somewhat higher amount in the latter case and at about 300 Mc/s for  $\text{BeSO}_4$ , while in the case of  $\text{H}_2\text{SO}_4$  the product  $Q \cdot \lambda$  still increases linearly with frequency. Furthermore  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ ,  $\text{MgCrO}_4$  and  $\text{MgS}_2\text{O}_3$  have been investigated (Fig. 2f...h):  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  shows at low concentrations a maximum at about 20 Mc/s which vanishes at higher concentrations,  $\text{MgS}_2\text{O}_3$  has a linear increase with frequency and  $\text{MgCrO}_4$  a maximum at 200 Mc/s but with a somewhat lower peak than  $\text{MgSO}_4$ . Finally two examples of salts with univalent ions i.e.  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  and  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  (Fig. 2i, k) have been

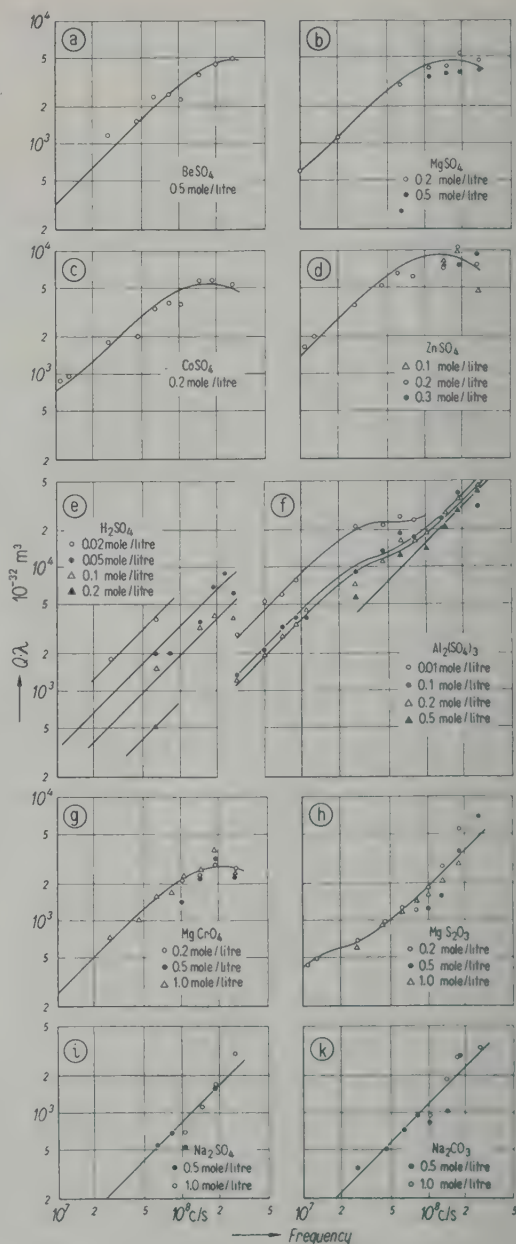


Fig. 2 (a...k). Frequency response of absorption cross-section  $\times$  wavelength ( $Q\lambda$ ) at 20°C for some electrolytes investigated in aqueous solutions.

measured, both of which show linear increases of  $Q \cdot \lambda$  with frequency. For comparison and to show the agreement, in all cases the measured points from earlier measurements [1] in the frequency range  $10^7$  to  $10^8$  c/s have been given once more. In the case of  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  which is interesting from its concentration dependence all measured values above  $10^6$  c/s have been plotted.



### c) Discussion of the results

According to our explanation mentioned in the introduction the second relaxation maximum now found for  $\text{MgSO}_4$  and  $\text{CoSO}_4$  at 200 Mc/s should be caused by the dissociation of  $\text{HSO}_4^-$  or the dissociation of  $\text{SO}_4^{--}$  from an  $\text{MgSO}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$ -complex respectively. This means that the same maximum must be found in  $\text{H}_2\text{SO}_4$ , but only if the dissociation process and not the association of  $\text{HSO}_4^-$  is really responsible for the relaxation time. For this reaction equilibrium of the second order this means that the concentration of the  $\text{HSO}_4^-$  ions must be small compared with that of the  $\text{SO}_4^{--}$  ions. Otherwise the relaxation time depends on concentration and the maximum is shifted to higher frequencies (see section 4). The dissociation constant  $K_c$  of  $\text{HSO}_4^-$ , however, amounts to only  $1.2 \cdot 10^{-2}$  so that the above mentioned condition is fulfilled only in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  concentrations smaller than 0.01 mole/litre. Therefore the fact that at a concentration of 0.05 mole/litre no maximum can be observed in  $\text{H}_2\text{SO}_4$  below 300 Mc/s is not in contradiction with our assumptions. Unfortunately concentrations lower than 0.05 mole/litre could not be measured with sufficient accuracy.

The larger amount of absorption  $\text{ZnSO}_4$  shows is probably due to a superposition of two relaxation processes since no other relaxation maximum is observed at lower frequencies.

$\text{BeSO}_4$  has—as is well known—a comparatively high degree of hydrolysis in aqueous solution (about 0.5 %). It was measured in a concentration of 0.5 mole/litre. This yields a concentration of  $\text{HSO}_4^-$  ions which is equivalent to that in a  $\text{H}_2\text{SO}_4$  solution of about 0.01 mole/litre, in which (as mentioned above) a noticeable shift of the relaxation frequency to higher frequencies in comparison with  $\text{MgSO}_4$  must be expected. The observation therefore may count as a confirmation of our assumptions.

$\text{MgCrO}_4$  differs only by the amount of maximum absorption,  $\text{MgS}_2\text{O}_3$  by amount and relaxation frequency from the sulphates. This seems plausible because of the similarity between  $\text{CrO}_4^{--}$  and  $\text{SO}_4^{--}$  ions. No explanation can be given at present for the step observed in the  $\text{MgS}_2\text{O}_3$  curve.

The concentration dependence of the absorption of  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$  is interesting although it is difficult to explain because of the complicated structure of this solution. The maximum observed at 30 Mc/s which vanishes with increasing concentration can scarcely be due to the dissociation of  $\text{AlOH}^{++}$ —because of the small radius and the threefold charge of the  $\text{Al}^{+++}$  ion the

relaxation frequency of this process should be lower than that of  $\text{BeOH}^+$  ( $< 1$  kc/s)—nor can the  $\text{HSO}_4^-$  dissociation be the cause. Perhaps it is due to the dissociation reaction  $\text{Al}(\text{OH})_2^+ \rightleftharpoons \text{AlOH}^{++} + \text{OH}^-$ . This would explain the decrease of this process with increasing concentration since the percentage of  $\text{Al}^{+++}$  (incomplete dissociation) as well as the degree of hydrolysis then decrease.

The two electrolytes with univalent ions show a further linear increase of  $Q \cdot \lambda$  with frequency so that no new hints are given to explain the origin of the absorption in this case.

### 3. Further investigations

#### a) Incomplete dissociation

Since according to our model explanation the amount of the absorption depends amongst other things on the degree of dissociation, electrolytes of a low degree of dissociation should be of special interest. Therefore  $\text{NH}_4\text{OH}$  and  $\text{La}(\text{NO}_3)_3$  have been investigated. The results are given in Fig. 3a and b.

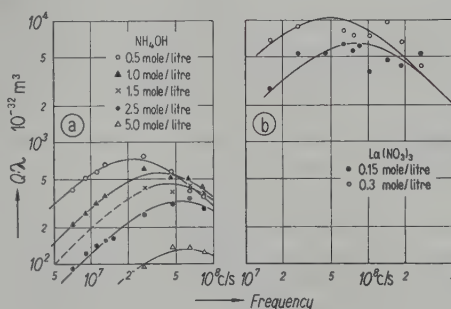
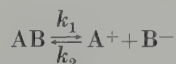


Fig. 3 (a, b). Frequency response of absorption cross-section  $\times$  wavelength ( $Q\lambda$ ) at 20 °C for two electrolytes with incomplete dissociation in aqueous solutions.

$\text{NH}_4\text{OH}$  is the first of all 1,1-valent electrolytes we investigated which has a considerable amount of absorption. Its absorption is comparable with that of  $\text{Na}_2\text{SO}_4$  and  $\text{Na}_2\text{CO}_3$  at about 30 Mc/s. As the dissociation constant of  $\text{NH}_4\text{OH}$  amounts to only  $K_c = 10^{-5}$ , the degree of dissociation in a 1 mole/litre solution is only about 0.3 %. If therefore the association process is responsible for the absorption a dependence of the relaxation frequency on concentration—as discussed above for  $\text{H}_2\text{SO}_4$ —must be expected. As is well known for reactions of the second order of the type



the relaxation frequency  $\nu_r$  is proportional to  $k_1$  for concentrations  $c \ll K_c$ , but proportional to  $\sqrt{k_1 k_2 c}$  for  $c \gg K_c$  with  $K_c = k_1/k_2$  and  $k_1, k_2$  being

the above defined reaction rates. In our case therefore a dependence of the relaxation frequency on  $\sqrt{c}$  must be expected, which in the concentration range from 0.5 to 5 mole/litre should yield an increase in the relaxation frequency by the factor 3.2 in good agreement with the results. The amount of the absorption cross-section  $Q$  can be calculated with the formula given in section 4c from the partial molar volume  $V$  and the calculation yields exactly the measured values.

As a second example for salts with incomplete dissociation  $\text{La}(\text{NO}_3)_3$  has been measured. This electrolyte shows astonishingly high values of  $Q \cdot \lambda$  which are only comparable to those of  $\text{ZnSO}_4$  or  $\text{Al}_2(\text{SO}_4)_3$ . Unfortunately because of economic reasons this salt could only be measured in the highest frequency ranges where only a small amount of the substance is necessary, so that the relaxation frequency and its dependence on concentration could not be measured exactly. On the other hand these results without further knowledge (dissociation constants) would not be of great importance because it would be difficult to find out to which of the three steps of dissociation the maximum is due to. The large amount of  $Q \cdot \lambda$  is probably due to the large  $\Delta V'$ -value (about  $40 \text{ cm}^3/\text{mole}$ ). The dissociation constant of  $\text{LaNO}_3^{++}$  from theoretical reasons must be estimated to about  $K_c = 10^{-2}$ .

The results given in this section are a confirmation of the assumption that for salts of minor valency too the dissociation process causes sound absorption. Whether, however, as in the case of the 2,2-valent electrolytes two different dissociation processes must be distinguished cannot be decided.

#### b) Influence of the dielectric constant of the solute

The electrolytic dissociation is caused by the dipole forces of the molecules of the solute, a measure for which is the dielectric constant of the liquid. In liquids with a smaller dielectric constant than water the dissociation energy therefore is larger and the relaxation frequencies should be shifted to lower frequencies. To get some experience in this direction alcohol would be a suitable solute. In pure alcohol, however, the solubility of most of the electrolytes investigated is very small and moreover its difference in dielectric constant against water is too large, so that it would be difficult to adjoin the relaxation frequencies to each other. As a compromise therefore solutions in water-alcohol mixtures have been measured. Fig. 4a and b show the results. Increasing amounts of alcohol have been added to aqueous  $\text{MgSO}_4$  solutions. By adding the

necessary amounts of electrolyte at the same time, the concentration has been kept constant. For economic reasons, ethyl alcohol denatured with pyridine had to be used, which, however, seems to have no influence on the absorption; the methyl alcohol was pure. In both cases the expected shift of the relaxation frequency to lower frequencies is observed together with an increase in the amount of maximum absorption. The latter is probably due to the increase of the percentage of undissociated molecules, to which (for  $c \ll K_c$ ) the absorption cross-section  $Q$  is proportional.

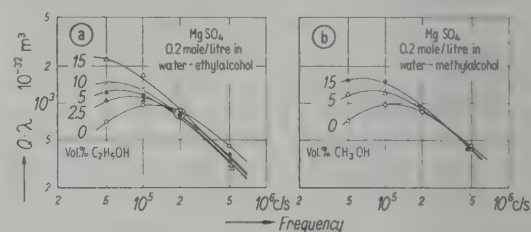


Fig. 4 (a, b). Influence of the dielectric constant of the solvent (water-alcohol mixture) on the product  $Q\lambda$  (absorption cross-section  $\times$  wavelength) of an  $\text{MgSO}_4$  solution.

### 4. Theoretical considerations\*

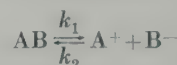
#### a) Consideration of reaction kinetics in electrolyte solutions

In the thermodynamical treatment of chemical equilibria in electrolyte solutions activity coefficients  $f_i$  are used, defined by

$$RT \ln f_i = \Delta \mu_r^i$$

where  $\Delta \mu_r^i$  is the deviation of the chemical potential from its value in an ideal solution.

In a dissociation equilibrium



the dissociation rate  $k_1$  in general is independent of concentration. It may formally be described by an activation factor

$$k_1 = k_{10} e^{-A E / RT}, \quad A E = \text{activation energy.}$$

The association reaction occurs in two steps: 1) approach of the partners (diffusion); 2) formation of the molecule AB (activated transition). The slower one of the two steps determines the reaction rate. If the association occurs without retardation, the reaction rate  $k_2$  can be calculated from the diffusion which then exclusively determines  $k_2$ . This yields values of the order of magnitude of  $10^{10}$  to  $10^{11} \text{ (s}^{-1} \text{ litre/mole)}$  corresponding

\* For further details see [2].



to relaxation frequencies of  $10^{10}$  to  $10^{11}$  c/s in 1 mole/litre solutions. Since our relaxation frequencies are considerably lower, the second step, retarded by an activation threshold, seems to determine the reaction rate and the probability of approach can be taken from the equilibrium distribution of the ions. (An estimation of the relaxation frequency of the ion atmosphere yields similarly high values.) Therefore the above defined activity coefficients can be introduced in the calculation.

The rate of association (alteration of the concentration of AB with time by association) is then given by

$$\dot{n}_{AB} = k_2 n_A n_B = k_2' c_A c_B \Pi_i^f$$

where  $k_2'$  is independent of concentration and  $\Pi_i^f = f_A f_B / f_{AB}$  the product of the activity coefficients.

#### b) Relaxation time of ion equilibria

If the equilibrium of a system is slightly altered by an external influence, the equilibrium re-establishes with the relaxation time  $\tau$  defined by the relation

$$\dot{n} = \frac{-(n - \bar{n})}{\tau}$$

$n$  is the momentary concentration (number of particles per  $\text{cm}^3$ ),  $\bar{n}$  its alteration with time and  $\bar{n}$  the equilibrium concentration. For a reaction of the first order—e.g.  $A \rightleftharpoons A'$ —this yields with  $\dot{n} = k_1 n_A - k_2 n_{A'}$ :

$$\tau = \frac{1}{k_1 + k_2}$$

The relaxation time is independent of concentration. For the above mentioned dissociation equilibrium  $AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$  we have with  $\dot{n} = k_1 n_{AB} - k_2' \Pi_i^f n_A n_B$  and with the equilibrium condition

$$\frac{\bar{n}_A \bar{n}_B}{\bar{n}_{AB}} \Pi_i^f = k_1 / k_2' = K_n$$

for the relaxation time

$$1/\tau = k_1 + k_2' \Pi_i^f (\bar{n}_A + \bar{n}_B) = k_2' (K_n + 2 \Pi_i^f \delta n_0).$$

Here  $\delta$  is the degree of dissociation,  $n_0$  the number of molecules per  $\text{cm}^3$ .

In this case the relaxation time depends on concentration except for low concentrations ( $n_0 \ll K_n$ ) where the second term can be neglected and the relaxation time  $\tau = 1/k_1$  is constant. At higher concentrations the influence of  $\Pi_i^f$  is important. It can compensate the influence of the concentration if—as in the case of  $\text{MgSO}_4$ — $f$  decreases in proportion to  $1/\sqrt{c}$ , so that even at relatively high concentrations the relaxation time

is determined by  $k_1$  exclusively. In general, however,  $\tau$  decreases with increasing concentration ( $\text{H}_2\text{SO}_4$ ,  $\text{NH}_4\text{OH}$ ).

From the measurements of the relaxation frequency and its concentration dependence therefore the reaction rates of dissociation processes can be determined.

#### c) The absorption cross-section

The second characteristic magnitude of the sound absorption in electrolytes is the maximum "absorption volume"  $(Q \cdot \lambda)_{\max}$  of one molecule. For its calculation the alterations of state in electrolyte solutions have to be considered. Because of  $c_p/c_v \approx 1$  only alterations of the form  $(d/dp)_s$ —excitation by the sound pressure  $p$ —are to be taken into account.

If  $\delta(p)$  is the pressure-dependent equilibrium value of the degree of dissociation with the relaxation time  $\tau$  necessary for its establishment we have with  $\delta$  being the momentary value:

$$\frac{\partial \delta}{\partial t} = -\frac{\delta - \delta(p)}{\tau} = -\frac{\delta - \delta(p_0) - [\delta(p) - \delta(p_0)]}{\tau}$$

and in case of a sinusoidal pressure variation  $\delta - \delta(p_0) = \Delta \delta e^{i\omega t}$

$$i\omega \Delta \delta \cdot \tau + \Delta \delta = \frac{\partial \delta}{\partial p} \Delta p$$

and we may write for small alterations  $\Delta \delta / \Delta p = (\partial \delta / \partial p)_\omega$

$$\begin{aligned} \left( \frac{\partial \delta}{\partial p} \right)_{s,\omega} &= \frac{1}{1 + i\omega \tau} \left( \frac{\partial \delta}{\partial p} \right)_{s,0} = \\ &= \frac{1}{1 + i\omega \tau} G_{(K,n)} \left[ \frac{\partial \ln (K / \Pi_i^f)}{\partial p} \right]_s \end{aligned}$$

with the definition

$$G_{(K,n)} = \left[ \frac{\partial \delta}{\partial \ln (K / \Pi_i^f)} \right]_{s,0}$$

The quantity  $G_{(K,n)}$  which depends on the type of the reaction will be given below for special cases.

If this alteration of state is coupled with an alteration of volume ( $\partial V / \partial \delta \neq 0$ ), an additional frequency-dependent compressibility  $\beta' = \beta_i / (1 + i\omega \tau)$  results, the part  $\beta_i$  of which can be derived from the above equation:

$$\beta_i = \beta'_{\omega=0} \approx \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial p} \right)_s = \frac{1}{v} \left( \frac{\partial v}{\partial \delta} \right)_s \left( \frac{\partial \ln (K / \Pi_i^f)}{\partial p} \right)_s \cdot G_{(K,n)}.$$

The specific volume  $v$  is given by the partial molar volumes  $V'$  and reads for the dissociation equilibrium  $AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$ :

$$v = \frac{1}{N_L [n_{\text{H}_2\text{O}} V'_{\text{H}_2\text{O}} + \delta n_0 (V'_{A^+} + V'_{B^-}) + (1 - \delta) n_0 V'_{AB}]}$$

With this and the well-known thermodynamic relation

$$\left[ \frac{\partial \ln (K/\Pi_i^f)}{\partial p} \right]_s \approx \left[ \frac{\partial \ln (K/\Pi_i^f)}{\partial p} \right]_T = - \frac{\Delta V_n'}{RT}$$

we get

$$\beta_i = \frac{n_0 (\Delta V_n')^2 \cdot G_{(K,n)}}{N_L R T},$$

$n_0$  = number of electrolyte molecules per unit volume,  $N_L$  = Loschmidt's number.

From the complex compressibility we get a complex sound velocity  $\bar{u} = 1/\sqrt{\rho_0 \beta}$  the real and imaginary part of which yield the velocity  $u$  and the absorption  $\alpha$  according to

$$1/\bar{u} = 1/u - i\alpha/\omega.$$

With this we come to the well-known relation ( $\lambda$  = wavelength)

$$2\alpha\lambda \approx 2\pi \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \cdot \frac{\beta_i}{\beta_0}$$

and it follows that

$$Q \cdot \lambda - \frac{2\alpha\lambda}{n_0} = 2\pi \frac{\omega\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \cdot \frac{(\Delta V_n')^2 G_{(K,n)}}{\beta_0 N_L R T}$$

and, its maximum value being independent of  $\tau$ ,

$$(Q \cdot \lambda)_{\max} = \pi \frac{(\Delta V_n')^2 G_{(K,n)}}{\beta_0 N_L R T}.$$

Since  $V_n'$  is nearly independent of concentration (for  $c < 0.1$  mole/litre), the concentration dependence is mainly given by  $G_{(K,n)}$ . In case of a reaction of the first order ( $A \rightleftharpoons A'$ ) it reads:

$$G = \frac{K}{(1+K)^2}$$

and for the dissociation reaction  $AB \rightleftharpoons A^+ + B^-$  which was considered above we get

$$G_{(K,c)} = \frac{K_c}{2c_0 \Pi_i^f} \left( \frac{1 + 2c_0 \Pi_i^f / K_c}{1 + 4c_0 \Pi_i^f / K_c} - 1 \right) = \frac{\delta(1-\delta)}{1 + (1-\delta)}$$

Therewith the maximum absorption cross-section  $\times$  wavelength  $(Q\lambda)_{\max}$  in principle can be calculated. Generally  $G$  depends on concentration. For low concentrations  $(1-\delta) \ll 1$  it is proportional to  $(1-\delta)$  while at high concentrations ( $\delta \ll 1$ ) the value  $(Q\lambda)_{\max}$  is proportional to  $\delta/2$ . The influence of  $\Pi_i^f$ , however, can compensate the concentration-dependence as it does in the case of some 2,2-valent electrolytes. Thus the value  $(Q\lambda)_{\max}$  similar to  $\tau$  in this case can be

independent of concentration. A numerical calculation of  $(Q\lambda)_{\max}$ , made for  $MgSO_4$ , agreed well with the measured values.

## 5. Numerical values of the absorption in electrolytes

For practical use finally some figures of the actual attenuations in solutions are given. The absorption values in dB per unit length are referred to 0.1 mole/litre solution and to 20°C. In a first approximation the concentration dependence is linear (except for  $H_2SO_4$ ).

Electrolyte	10 kc/s	100 kc/s	1 Mc/s	10 Mc/s	100 Mc/s
	dB/km	dB/km	dB/m	dB/cm	dB/cm
H <sub>2</sub> O	0.0217	2.17	0.217	0.217	21.7
Al <sub>2</sub> (SO <sub>4</sub> ) <sub>3</sub>	≥ 0.1	10.0	1.0	1.0	57
BeSO <sub>4</sub>	1.75	4.8	0.29	0.29	28
CaCrO <sub>4</sub>		≥ 3.1	0.31	0.31	29
Ca(CH <sub>3</sub> COO) <sub>2</sub>	≥ 0.036	3.6	0.36	0.36	36
CoSO <sub>4</sub>	1.77	162	2.3	0.39	31
CuSO <sub>4</sub>	0.282	23	0.43	0.39	39
MgCrO <sub>4</sub>	≥ 0.72	54.7	0.48	0.29	29
MgSO <sub>4</sub>	3.92	247	0.9	0.3	29
MgS <sub>2</sub> O <sub>3</sub>	1.42	90	0.57	0.28	23.8
MnSO <sub>4</sub>	0.55	51	5.2	0.74	29
NiSO <sub>4</sub>	31.0	86	0.48	0.39	29
ZnSO <sub>4</sub>	≥ 0.05	5	0.5	0.5	36
H <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			0.24	0.24	24
AlCl <sub>3</sub>			0.223	0.223	22.3
K <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			0.227	0.227	22.7
K <sub>2</sub> CrO <sub>4</sub>			0.226	0.226	22.6
La(NO <sub>3</sub> ) <sub>3</sub>				0.5	34
Li <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>			0.238	0.238	23.8
Li <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			0.229	0.229	22.9
Na <sub>2</sub> CO <sub>3</sub>			0.24	0.24	24
Na <sub>3</sub> PO <sub>4</sub>		≥ 3.9	0.39	0.35	30.7
Na <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			0.25	0.25	25
(NH <sub>4</sub> ) <sub>2</sub> SO <sub>4</sub>			0.227	0.227	22.7

## Acknowledgements

The authors wish to thank Dr. M. EIGEN for helpful discussions on physico-chemical problems. Thanks are further due to Prof. Dr. E. MEYER for his close interest in this work and to Dr. J. LAMB for many suggestions with respect to the construction of the pulse measuring apparatus.

The work described in this report was carried out under arrangement with the Department of Scientific and Industrial Research, London, whose assistance and interest are gratefully acknowledged. It is published with the permission of the Department.

(Received 4th May, 1953.)

## References

- [1] KURTZE, G., and TAMM, K., *Acustica* 3 [1953], 33–48.
- [2] EIGEN, M., KURTZE, G., and TAMM, K., *Z. Elektrochem.* 57 [1953], 103–118.

An index of literature is given in both of these papers.



# GÉNÉRATEURS D'ULTRA-SONS DANS L'AIR, A CYLINDRES, PISTONS, SPHÈRES ET CUBES VIBRANTS

par V. GAVREAU et M. MIANE

Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille

## Sommaire

Émetteurs électrodynamiques d'ultra-sons à solides vibrant en résonance. Avantages de ce type d'émetteurs pour les mesures acoustiques. Possibilité d'obtenir des puissances acoustiques élevées. Focalisation. Montages d'auto-entretien pour fréquences élevées. Visualisation des ultra-sons. Étude de la vibration des surfaces émettrices. Audibilité de sons de fréquence élevée. Application à l'étalonnage absolu de microphones aux fréquences ultra-sonores.

## Zusammenfassung

Elektrodynamische Ultraschallsender aus festen Körpern, die in Resonanz betrieben werden. Vorteile dieser Sender für akustische Messungen. Möglichkeiten, große akustische Leistungen zu erreichen. Fokussierung. Selbsterregung bei hohen Frequenzen. Sichtbarmachung des Ultraschalls. Untersuchung der Schwingung der Senderoberflächen. Hörbarkeit von Schall hoher Frequenz. Anwendung bei der Absoluteichung von Mikrophonen im Ultraschallbereich.

## Summary

Electrodynamic ultrasonic sources made of solids vibrating in resonance; advantages of this type for acoustic measurements; possibility of obtaining large acoustic power from them; focusing; re-generative systems for high frequencies; methods of making the ultrasonic vibrations visible; study of the vibration of the emitting surfaces; audibility of high frequency sounds; application to the absolute calibration of microphones at ultrasonic frequencies.

## Introduction

Les sources industrielles de sons et d'ultra-sons puissants dans l'air, telles que les sirènes et les sifflets, donnent généralement des sons complexes avec une forte proportion d'harmoniques. C'est pourquoi, pour les études de laboratoire nécessitant des sons ou ultra-sons purs (sinusoïdaux), on utilise des émetteurs électromécaniques à résonance. Ces derniers présentent en outre l'avantage de n'émettre aucun courant d'air superflu et ils donnent une onde de forme bien définie (plane, cylindrique, sphérique suivant la forme du solide vibrant en résonance).

Les émetteurs à quartz et à magnétostriction ont un mauvais rendement dans l'air; c'est pourquoi on utilise des émetteurs électrodynamiques dont le rendement électroacoustique atteint 30 % et qui permettent d'obtenir des puissances de plusieurs centaines de watts acoustiques.

Les premiers émetteurs de sons de très grande intensité, à cylindres vibrants, ont été réalisés par H. W. ST. CLAIR [1]. Nous sommes partis du même principe pour réaliser des émetteurs d'ultra-sons de fréquences relativement élevées (90 kHz), des émetteurs focalisants (intensité très forte en un point), des émetteurs sphériques (équivalents à une source ponctuelle) et des pistonphones à fréquence élevée pour l'étalonnage direct absolu

de microphones, notamment dans la gamme ultra-sonore<sup>1</sup>.

Nous allons décrire successivement:

1. le principe et la réalisation des émetteurs à cylindre vibrant,
2. les nouveaux types d'émetteurs électrodynamiques réalisés au C. R. S. I. M.,
3. les générateurs de sons audibles,
4. les générateurs d'ultra-sons,
5. l'étude de la vibration et du rayonnement,
6. la mesure optique des amplitudes et l'étalonnage absolu de microphones à fréquences sonores et ultra-sonores.

## 1. Principe et réalisation des émetteurs à cylindre vibrant

Le rendement d'un haut-parleur électrodynamique ordinaire est très faible et la fréquence des sons émis ne dépasse guère 6 kHz dans le cas de grands haut-parleurs et 13 kHz dans le cas de très petits haut-parleurs appelés «tweeters». Mais, en remplaçant le cône en carton d'un haut-parleur par un cylindre métallique plein vibrant longitu-

<sup>1</sup> Étalonnage indispensable pour l'étude et le contrôle des émetteurs d'ultra-sons industriels tels que les sirènes et les sifflets. A notre connaissance il n'existait jusqu'à présent aucun procédé d'étalonnage direct absolu de microphones aux fréquences ultra-sonores.

dinalement en demi-longueur d'onde, on peut réaliser un générateur puissant, à très bon rendement, capable d'émettre des sons et des ultra-sons de fréquence élevée.

Un tel cylindre vibrant doit être en métal non magnétique pour que sa vibration ne soit pas gênée par l'électro-aimant. Ce métal doit être à faible friction interne («sonore») et bon conducteur électrique, car la bobine excitatrice est taillée dans la masse. On utilise généralement soit le duralumin, soit le laiton.

Pour ne pas gêner la vibration (les contractions et les dilatations longitudinales et radiales), il doit être supporté librement en son centre de gravité.

Le rapport du diamètre à la longueur du cylindre joue un rôle important. Pour avoir le meilleur rendement, il faut que la fréquence de résonance de la vibration radiale (contractions et dilatations radiales) soit égale à sa fréquence de résonance longitudinale. Or si cette dernière est donnée par une formule très simple (le cylindre vibre longitudinalement en demi-longueur d'onde), la résonance pour les vibrations radiales est donnée par une formule plus complexe faisant intervenir une racine de l'équation de Bessel; il en résulte que le rapport du diamètre à la longueur doit être égal à une racine de l'équation de Bessel:

$$\frac{\Phi}{l} = 1,178 \quad \text{ou} \quad = 3,393.$$

L'expérience montre que la première valeur donne les meilleurs résultats.

Le cylindre vibrant est supporté en son centre de gravité par une longue tige métallique pénétrant par une de ses bases comme le montre la Fig. 1. Il est excité par une bague métallique taillée dans la masse sur l'une de ses bases. Cette

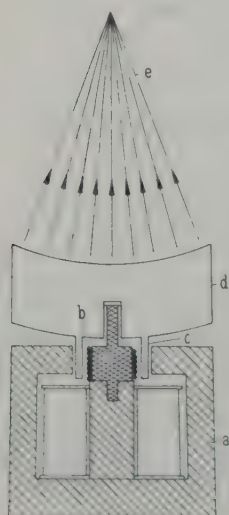


Fig. 1.

Principe d'un émetteur d'ultra-sons à cylindre vibrant focalisant.

- a) Electro-aimant ordinaire d'un haut-parleur électrodynamique;
- b) Bobine excitatrice fixée sur le pôle central de l'électro-aimant;
- c) Bague taillée dans la masse, jouant le rôle d'une bobine mobile;
- d) Cylindre vibrant en duralumin;
- e) Foyer, l'ultra-son émis par le cylindre vibrant se concentre en ce point.

bague pénètre dans l'entrefer de l'électro-aimant et des courants très intenses y sont induits par un enroulement auxiliaire, fixe, placé sur le pôle central de l'électro-aimant (pôle préalablement feuilleté pour réduire les courants de Foucault).

La courbe de résonance d'un tel cylindre présente une pointe très aiguë (c'est un système vibrant extrêmement «sélectif»); il suffit de s'écarter de quelques périodes de la fréquence de résonance, pour que le rendement baisse considérablement, même dans le cas des cylindres vibrant à 90 kHz. C'est pourquoi on ne peut pas utiliser une hétérodyne pour l'entretien prolongé des vibrations, d'autant plus que le léger échauffement du cylindre au cours du fonctionnement provoque une dérive de sa fréquence de résonance. On est obligé d'utiliser un montage d'auto-entretien des vibrations constitué, par exemple, par un microphone, un amplificateur accordé, un pont déphaseur et un amplificateur de puissance.

## 2. Nouveaux types d'émetteurs électrodynamiques réalisés au C. R. S. I. M.

### a) Émetteurs puissants de 13 kHz et de 20 kHz pour l'étude de la coagulation des goudrons par les ultra-sons.

L'émetteur utilisé rappelle celui de ST. CLAIR, mais les sons sont émis vers le bas, le cylindre étant suspendu par un ensemble de tiges formant un bâti soudé à l'autogène, comme le montre la Fig. 2.

Les essais ont mis en évidence l'impossibilité pratique d'employer les cylindres vibrants pour le traitement industriel des gaz et des fumées. En effet, le métal du cylindre est très rapidement attaqué et subit une forte corrosion (le vernis protecteur que nous avons essayé d'utiliser gêne la vibration); la tige-support s'encrasse, la température et l'humidité provoquent la détérioration des isolants électriques. Enfin, il est dangereux

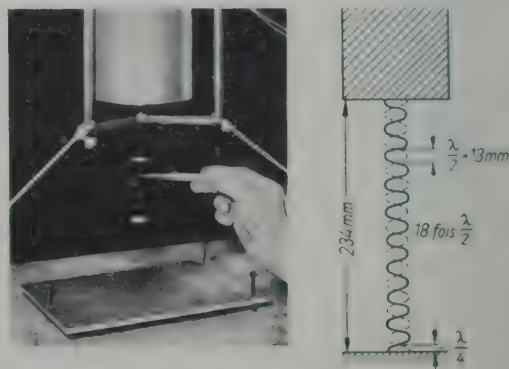


Fig. 2. Cylindre suspendu et ondes stationnaires;  $\lambda = 26$  mm,  $f = 13$  kHz.



de manipuler des appareils électriques à tension relativement élevée (400 V) dans les ateliers d'usine et l'oscillateur à lampes est un appareil délicat et assez fragile. C'est pourquoi, pour les essais industriels, nous utilisons des sifflets de grande puissance au lieu de cylindres vibrants.

#### b) Cylindres focalisants

En donnant une courbure convenable aux bases d'un cylindre vibrant, nous avons réalisé des cylindres focalisants concentrant l'ultra-son en un point où l'intensité sonore atteint une très grande valeur (Fig. 1). Un tel dispositif convient, par exemple, pour l'étude des effets des ultra-sons sur les insectes. Le calcul complet d'un émetteur focalisant a été fait, dans le cas des émetteurs à quartz, par A. I. GOUBANOV [2] et également par H. T. O'NEIL [3].

GOUBANOV trouve la formule suivante pour l'accroissement de la pression acoustique (rapport des amplitudes de la pression au foyer et près de la surface émettrice):

$$\gamma = \frac{S}{r\lambda}.$$

où  $S$  est la surface émettrice,  
 $r$  est le rayon de courbure,  
 $\lambda$  est la longueur d'onde de l'ultra-son.

Le rapport des intensités acoustiques est, évidemment, égal à  $\gamma^2$ .

On obtient dans ces conditions un très fort accroissement de l'intensité sonore (de l'ordre de 150 théoriquement). En fait, nous avons constaté des effets mécaniques nets sur la main et sur l'oreille lorsqu'on les place au foyer d'un tel émetteur.

Des cylindres focalisants concaves ou convexes, peuvent être utilisés comme sources ponctuelles d'ultra-sons très intenses.

#### c) Cylindres vibrants entretenus par courants de Foucault dans un champ magnétique ondulé

Pour produire des ultra-sons de fréquence élevée, de l'ordre de 1 MHz, par exemple, on est conduit à réaliser des cylindres de dimensions si petites (de quelques millimètres de longueur) qu'il devient impossible de les exciter à l'aide d'une bague taillée sur l'une de leurs faces. Mais de tels cylindres peuvent être excités en les plaçant dans un champ magnétique ondulé (superposition d'un champ continu intense et d'un champ alternatif) parallèle à leur axe. Comme le montre la Fig. 3, le champ magnétique continu est produit par un électro-aimant, tandis que le champ alternatif est fourni par une bobine auxiliaire. Le cylindre représenté sur la Fig. 3 donne un son de 86 kHz.

Le principe d'un tel émetteur est très simple: les courants induits (courants de Foucault) sont concentriques à l'axe du cylindre et sous l'effet du champ magnétique continu parallèle à cet axe, ils engendrent des forces radiales alternatives provoquant des dilata-tions et des contractions du cylindre.

Bien entendu, dans le cas de fréquences très élevées, il est nécessaire d'utiliser des pièces polaires en Ferro-cube.

Les essais ont montré que dans le cas d'un tel petit cylindre suspendu en son centre de gravité, la résonance était aussi aiguë que dans le cas des cylindres décrits précédemment, mais la puissance est plus faible.

#### d) Sphères et cubes vibrants

De même qu'on excite un cylindre vibrant par une bague solidaire de sa base, il est possible de provoquer des vibrations intenses d'autres solides (tels que les sphères, les cubes, etc.) à l'aide d'une bague placée dans l'entrefer de l'électro-aimant d'un haut-parleur. Sur la Fig. 4 on reconnaît: l'électro-aimant d'un petit haut-parleur, dont le pôle central est muni d'une tige verticale destinée à supporter, en leur centre de gravité, les solides vibrants. Sur cette figure, le solide vibrant est une sphère en duralumin. Elle présente un intérêt particulier car elle émet des ondes sensiblement sphériques (voir la Fig. 14); elle équivaut donc à une source ponctuelle d'ultra-sons.

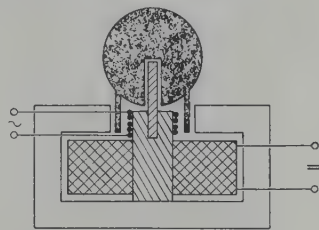


Fig. 4. Sphère vibrante.

Nous avons réalisé quelques autres volumes vibrants, tous en duralumin, dont voici les dimensions:

la sphère: diamètre 37 mm, fréquence émise 67 kHz;

le cube: arête = 26 mm, fréquence 80 kHz;

le premier cylindre: hauteur 28 mm,

$\varnothing = 33$  mm,  $f = 77$  kHz;

le deuxième cylindre: hauteur 25 mm,

$\varnothing = 29,5$  mm,  $f = 90$  kHz.

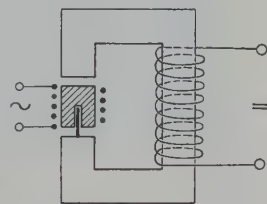


Fig. 3. Cylindre excité par courants de Foucault.

e) *Pistons vibrants*

Un des avantages des cylindres vibrants est que leur vibration à la fréquence de résonance est très bien définie: leur base vibre comme un piston et en mesurant l'amplitude de cette vibration, on peut facilement calculer l'intensité du son émis. Un tel cylindre peut donc être utilisé comme un «pistonphone» pour l'étalonnage de microphones. Toutefois, pour émettre des sons de fréquence musicale et surtout, pour émettre des sons graves, on serait obligé d'employer des cylindres de longueur prohibitive. (Déjà pour la fréquence relativement élevée de 13 kHz, le cylindre vibrant mesure 215 mm.)

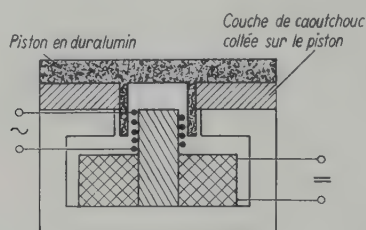


Fig. 5. Piston vibrant.

C'est pourquoi, pour réaliser des émetteurs vibrant en résonance à des fréquences plus graves, nous utilisons des «pistons» assez épais en duralumin munis d'une bague taillée dans la masse, semblable à celle d'un cylindre vibrant, comme le montre la Fig. 5. Au lieu d'être suspendu en son centre de gravité, un tel piston est collé sur un anneau large en caoutchouc (ou en caoutchouc-mousse) qu'on fixe sur l'électro-aimant. Dans ces conditions la fréquence de résonance est définie par la masse du piston + sa bague et la dureté plus ou moins grande du caoutchouc. En utilisant des couches de caoutchouc plus ou moins épaisses et, au besoin, des pistons allégés par des excavations sur leur face intérieure, on arrive à obtenir toute une gamme de fréquences de résonance.

## 3. Générateurs de sons audibles

a) *Détermination des dimensions des cylindres vibrants*

Nous n'avons pu trouver nulle part des indications relatives à la vitesse de propagation du son dans le duralumin. D'après les dimensions des cylindres vibrants et leurs fréquences de résonance, cette vitesse paraît être de l'ordre de 5000 m/s. On sait que la vitesse de propagation du son dans le laiton est de l'ordre de 3500 m/s. Ainsi, les cylindres vibrants en dural, sont sensiblement  $5:3,5 = 1,43$  fois plus grands que les cylindres en laiton, pour une même fréquence.

On sait que le cylindre vibre en demi-longueur d'onde. Mais dans le cas d'un cylindre vibrant, la vitesse de propagation dépend non seulement de la nature du métal, mais également du diamètre. Or, sauf pour les petits cylindres, nous étions obligés d'utiliser des rondins de dural disponibles, de diamètre très inférieur à la longueur. Dans ces conditions, il est difficile de prévoir d'avance, avec précision la fréquence de résonance. Voici, à titre documentaire, quelques dimensions de cylindres en duralumin à bases planes et leurs fréquences de résonance:

Hauteur mm	Diamètre mm	Fréquence kHz
307	85	8,4
215	125	13
140	90	17,5
98	115	20
94	115	23
85	100	26
80	85	31

À titre de comparaison, voici les dimensions de quelques cylindres pour fréquences ultra-sonores:

	Hauteur mm	Diamètre mm	Fréquence kHz
Focalisants...	26,5	101	74
A bases planes	27	94	77
"	28	33	77
"	25	29,5	90
Focalisant	19,5	97	94

Ajustage exact de la fréquence. Après avoir réalisé un cylindre avec des dimensions légèrement supérieures aux valeurs calculées, on contrôle sa fréquence et on l'accroît progressivement en réduisant la longueur et le diamètre (qui doivent rester, autant que possible, toujours dans le rapport  $\varnothing/l = 1,178$ ), d'abord au tour (en usinant chaque fois les deux faces, pour que le trou du support se termine toujours au centre de gravité), ensuite en se servant du papier émeri très fin. Dans ces conditions, il est possible (en utilisant les figures de Lissajous sur un oscillographe cathodique) d'ajuster la fréquence à quelques périodes près même dans le cas de fréquences ultra-sonores. Toutefois, ces mesures doivent être faites seulement lorsque le cylindre, en s'échauffant progressivement, a pris sa température de régime. Sur la Fig. 6 on a tracé, en cours d'usage, deux courbes de variation de  $f$  en fonction de  $l$ .



b) *Système d'auto-entretien des vibrations*

Dans le cas des fréquences audibles, les variations de longueur du cylindre provoquées par sa vibration, sont suffisantes pour que le condensateur variable, formé par sa base et une électrode fixée sur le pôle central de l'électro-aimant, puisse être utilisée comme un microphone à condensateur. Comme électrode auxiliaire (fixe) nous utilisons un disque en clinquant de cuivre fendu suivant plusieurs rayons pour réduire les courants de Foucault.

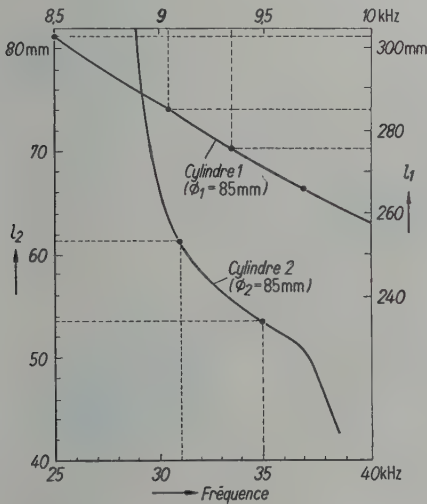


Fig. 6. Exemples de variation de la fréquence en fonction de la longueur de cylindres vibrants, dans le cas d'un diamètre constant (courbes d'ajustage de la fréquence).

Le cylindre vibrant est à la masse, tandis que l'électrode auxiliaire (portée à 400 V) commande, à travers un condensateur, la grille d'une lampe amplificatrice de tension dont le circuit plaque est accordé sur la fréquence du cylindre. Cette lampe amplificatrice est suivie d'un pont déphaseur réglable à résistances et capacités. La tension fournie par ce pont doit ensuite être amplifiée pour attaquer l'amplificateur de puissance de 300 W, qui commande la vibration du cylindre vibrant.

c) *Mesure exacte de la fréquence*

La puissance acoustique émise par le cylindre de 13 kHz est de l'ordre de plusieurs dizaines de watts acoustiques. Elle est suffisante pour maintenir dans l'air des petits objets tels que des plaquettes de liège, de bois, de papier et même des plaquettes métalliques. On voit ce phénomène sur la Fig. 2.

À droite, sur la Fig. 2, sont indiquées les distances entre les plaquettes flottant dans l'air (on

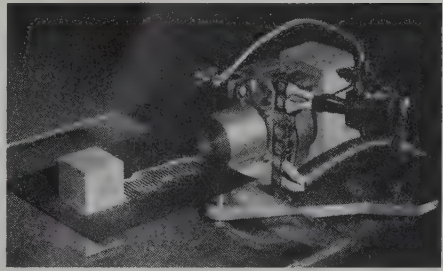


Fig. 7. L'émetteur en dural avec son cristal (échelle: 1/4).

arrive ainsi à maintenir simultanément dans l'air jusqu'à 18 rondelles de papier): En mesurant les distances, connaissant la vitesse de propagation du son dans l'air, on calcule facilement la fréquence.

La première des plaquettes, la plus rapprochée de la plaque réfléchissante, flotte à une distance d'un quart de longueur d'onde de cette dernière. Les plaquettes suivantes se trouvent à des distances de 1/2 longueur d'onde. Ceci montre que les plaquettes se placent aux nœuds de pression (c'est-à-dire, ce qui paraît assez curieux, aux ventres de vitesses des particules), car la plaque réfléchissante constitue évidemment un ventre de pressions.

Un autre procédé de mesure de fréquences consiste à utiliser du sable fin sur une épaisse plaque horizontale et un obstacle plan vertical provoquant la formation d'ondes stationnaires (Fig. 7). Dans le cas d'un cylindre horizontal, ceci ne présente aucune difficulté. Par contre, dans le cas d'un cylindre vertical, on serait obligé d'utiliser une plaque réfléchissante à 45° pour obtenir un faisceau sonore horizontal. Le sable se dresse en petits murs verticaux, distants d'une demi-longueur d'onde. Ce procédé de sable ou d'autres poudres légères est applicable également dans le cas des autres cylindres émettant un son plus faible.

Soit  $d = \lambda/2$  la demi-longueur d'onde, en millimètres. La fréquence en kHz est  $f = 170/d$  à 20° et 760 mm de mercure.

d) *Audibilité des sons très aigus*

Contrairement à ce qu'on croyait jusqu'à présent, l'oreille humaine entend très bien des sons de fréquence supérieure à 20 kHz, à condition qu'ils soient suffisamment intenses. Ainsi, le son émis par le cylindre de 20 kHz est presque insupportable, même dans un local voisin de celui où il est émis. On entend également très nettement les sons de 23 kHz et de 26 kHz (ce dernier se distinguant d'ailleurs très nettement du son de 13 kHz: il ne s'agit nullement d'un «sous-harmo-

nique»). Par contre le 30 kHz s'entend comme du 15 kHz.

D'autre part, nous avons pu affaiblir de 45 dB les sons de 17,5 kHz et de 20 kHz, sans qu'ils cessent pour cela d'être audibles. Ce qui montre que l'intervalle d'audibilité (la distance entre la courbe du seuil d'audibilité et la courbe de sensation douloureuse) reste encore très grand même dans le cas de sons aigus.

Toutefois, si les sons très aigus restent audibles, leur «couleur musicale» semble disparaître; il devient difficile de distinguer les hauteurs des sons dans le cas de fréquences très élevées; le sifflement commence à perdre son caractère musical<sup>2</sup>.

#### e) Effet physiologique des sons aigus intenses

Malgré la faible sensibilité de l'oreille pour les sons très aigus, qui les fait paraître relativement moins intenses, ils produisent des effets très nets. Il est pratiquement impossible de faire un calcul ou tout autre travail nécessitant un effort d'attention lorsque le cylindre de 13 kHz ou de 17,5 kHz fonctionne<sup>3</sup>. Une écoute prolongée (une dizaine de minutes, par exemple) provoque une très forte sensation de fatigue, d'abattement général et l'impression d'avoir de la fièvre ou un rhume de cerveau. Cet effet subsiste pendant des heures après la cessation du son. Par contre nous n'avons observé aucun effet de vertige ni de nausée.

C'est pourquoi nous avons été obligés de mettre au point des protège-oreilles efficaces avant de poursuivre ces essais. Heureusement, plus le son est aigu, plus il est facile de s'en protéger, aussi bien à l'aide de cloisons (dont la masse arrête le son), qu'à l'aide de tous les absorbants acoustiques tels que: le kapok, le feutre, etc., dont l'efficacité croît avec la fréquence.

### 4. Générateurs d'ultra-sons

Nous avons vu, dans le chapitre précédent, comment on détermine les dimensions d'un

<sup>2</sup> Nous avons constaté, dans le cas de «sirènes statiques» (sifflets Levavasseur) émettant des ultra-sons très puissants de fréquence encore plus élevée, qu'on «continue nettement à entendre quelque chose, sans pouvoir définir exactement quoi»; l'impression est très nette et très pénible, mais sans aucun caractère musical. Ceci rappelle un peu la vision dans la pénombre, lorsqu'on continue à voir tout en ne distinguant plus les couleurs.

<sup>3</sup> Ceci pourrait présenter un danger réel, par exemple, dans le cas du pilotage d'une machine susceptible d'émettre de tels «ultra-sons».

cylindre vibrant devant émettre un son de fréquence donnée. Il suffit que ces dimensions soient assez petites pour que le son émis soit un véritable ultra-son.

#### Système d'auto-entretien à cristal piézoélectrique

L'amplitude de vibration de petits cylindres est très faible. C'est pourquoi on ne peut pas utiliser, comme microphone à condensateur, l'ensemble formé par leur base et par le pôle central de l'électro-aimant (comme nous le faisons dans le cas des grands cylindres).

Nous avons résolu cette difficulté en utilisant un cristal de sel de Seignette placé à une certaine distance du cylindre vibrant. En réglant la distance entre ce microphone et le cylindre vibrant, on modifie le déphasage; ainsi l'emploi du pont déphaseur devient inutile. Le montage (représenté sur la Fig. 8) se réduit ainsi à un pré-amplificateur à deux étages accordés suivi d'un amplificateur de puissance.

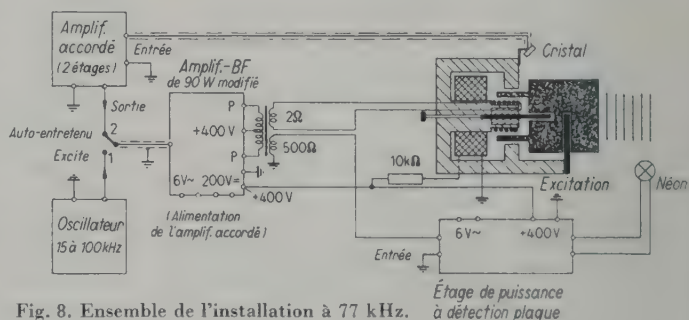


Fig. 8. Ensemble de l'installation à 77 kHz.

Le microphone (un cristal carré de 10 × 10 mm) est placé à 30 mm latéralement par rapport au cylindre, pour ne pas perturber l'onde plane émise par la base supérieure de ce dernier.

L'amplificateur de puissance est un amplificateur basse fréquence de 90 W dans lequel on a supprimé le circuit de tonalité et remplacé le transformateur de sortie par un transformateur spécial à tôles très minces et enroulements à faible capacité.

Dans le cas de la Fig. 7, la fréquence de l'ultra-son émis est de 77 kHz et la puissance acoustique est de l'ordre de 2 W. On contrôle la vibration à l'aide d'un voltmètre incorporé dans l'amplificateur. Une installation de ce type a été réalisée par le C.R.S.I.M. pour les études sur maquettes (notamment sur maquettes d'avions à l'Institut de Mécanique des Fluides à Marseille).

Les ultra-sons émis par des cylindres vibrants sont beaucoup plus intenses que les ultra-sons émis par les appareils à magnétostriction. On les détecte facilement à une distance supérieure à



14 m à 77 kHz. À faible distance du cylindre, surtout dans le cas des cylindres focalisants, la main sent nettement des variations de pression sonore sous la forme d'une palpitation du muscle. On peut facilement se rendre compte du rendement, en arrêtant la vibration du cylindre, ce qui provoque une variation très appréciable de la consommation électrique.

## 5. Étude de la vibration et du rayonnement

### a) Figures de sable

Le procédé le plus simple pour étudier la vibration de la surface émettrice d'un cylindre consiste à la saupoudrer de sable fin. Dans le cas d'un cylindre vibrant à sa fréquence fondamentale (et tel est le cas de tous les cylindres dont la longueur est sensiblement égale ou supérieure au diamètre), la base émettrice vibre comme un piston; dans ces conditions le sable est immédiatement rejeté et il n'en reste pas un grain sur la surface vibrante. Mais dans le cas de cylindres de grand diamètre et de petite hauteur, plusieurs modes de vibration avec déformation sont possibles. On obtient dans ce cas des figures de sable telles que celles des Fig. 9, 10 et 11. Bien entendu, dans le cas de tels modes de vibration, l'onde émise par une base plane n'est pas une onde plane et la focalisation par un cylindre concave (tel que celui de la Fig. 10) est beaucoup moins efficace que dans le cas du mode de vibration fondamental.

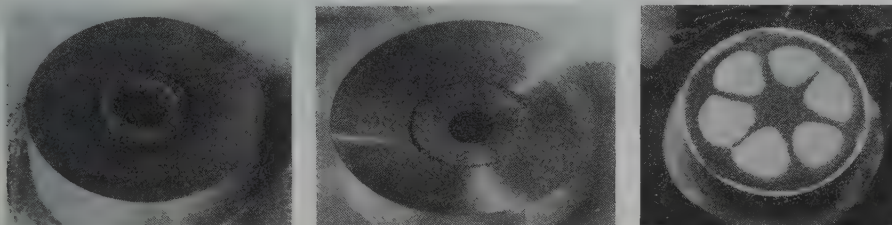


Fig. 9 à 11.

### b) Visualisation par le procédé des stries

Les compressions et les dilatations de l'air provoquées par les ondes ultra-sonores, font varier son indice de réfraction optique. C'est pourquoi le procédé de stries est applicable pour leur visualisation. Rappelons brièvement le principe de ce procédé (Fig. 12). La lumière d'une source ponctuelle S est concentrée par une grande lentille L sur le diaphragme derrière lequel se trouve l'œil de l'observateur O (ou un appareil photographique). Dans ces conditions, l'œil voit la surface de la lentille L uniformément éclairée. Mais, si sur le trajet de la lumière se trouve une région présentant un indice de réfraction diffé-

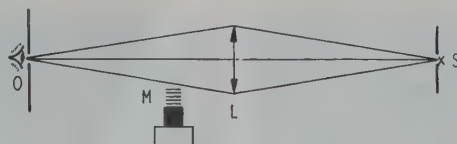


Fig. 12. Procédé des stries.

rent (l'air plus chaud ou une onde sonore) une partie de la lumière est déviée et n'atteint pas le trou du diaphragme; la région correspondante apparaît comme plus sombre sur la surface de la lentille L.

Nous utilisons comme source lumineuse une lampe au néon (permettant la vision stroboscopique des ondes progressives) et comme diaphragme, une fente étroite horizontale. Dans cet appareil perfectionné par Mademoiselle M. MERLE, la lentille est remplacée par un miroir concave, ce qui présente le double avantage:

1. d'un grand champ de vision uniformément éclairé,
2. d'une grande netteté des ondes visualisées, car la lumière traverse deux fois (aller et retour) le faisceau ultra-sonore<sup>4</sup>.

Sur la Fig. 13 on voit les ondes progressives de 90 kHz émises par un cylindre vibrant. Ces ondes sont planes et le faisceau est très directif.

L'appareil optique permet de favoriser à volonté, soit la visualisation des ondes horizontales, soit celle des ondes verticales. Dans le cas

de la Fig. 14 nous avons favorisé la visualisation des ondes émises verticalement.

Sur la Fig. 14 on voit les ondes émises par la sphère (67 kHz). Il existe un déphasage entre les ondes émises horizontalement et les ondes émises vers le haut (ces dernières ont été rendues particulièrement nettes par la visualisation); on distingue facilement leur forme sphérique. Ainsi, pour la région se trouvant au-dessus de la sphère, celle-ci peut être assimilée à une source ponctuelle.

<sup>4</sup> Cet appareil de visualisation des ondes ultra-sonores a été réalisé par Monsieur DRATZ, au Laboratoire d'Optique du C. R. S. I. M.

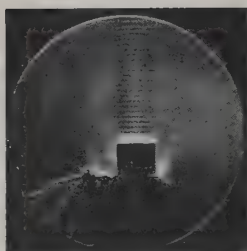


Fig. 13  
Visualisation des ondes  
ultra-sonores (90 kHz).

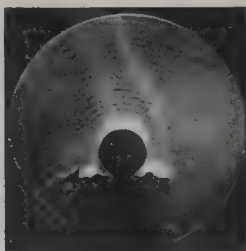


Fig. 14  
Sphère (67 kHz)  
(ondes sphériques).

### c) Enregistrement polaire cathodique

Nous avons enregistré les courbes de rayonnement (diagrammes polaires) des différents types d'émetteurs décrits ci-dessus, à l'aide d'un enregistreur polaire cathodique<sup>5</sup> permettant d'obtenir en quelques secondes, des diagrammes polaires directement sur un film Leica. On voit ces enregistrements sur les Fig. 15, 16, 17 et 18. Les points blancs uniformément espacés sur la périphérie constituent une graduation de  $10^\circ$  en  $10^\circ$  marquée par l'enregistreur polaire.

Comme microphone nous avons utilisé un très petit microphone électromagnétique muni d'un tube explorateur pour les basses fréquences et, pour les ultra-sons, un quartz piézoélectrique dans un boîtier muni de diffuseur exponentiel



Fig. 15.  
Enregistrement polaire du  
cylindre ( $f = 13$  kHz).

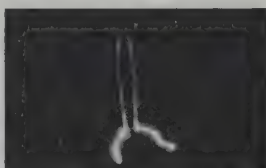


Fig. 16.  
Enregistrement polaire du  
cylindre ( $f = 90$  kHz).

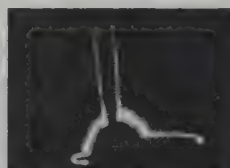


Fig. 17.  
Cube (mise en évidence du  
rayonnement vertical et  
des rayonnements latéraux,  
déphasés de  $180^\circ$ )  
( $f = 80$  kHz).

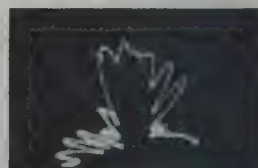


Fig. 18.  
Sphère (on notera la cassure  
entre le rayonnement  
vertical et le rayonnement  
horizontal)  
( $f = 67$  kHz).

(évitant les réflexions parasites) ne captant le son que par un petit orifice de  $2 \times 2$  mm.

Le rayonnement du cylindre (Fig. 16) est incliné de  $5^\circ$  par rapport à la verticale, simplement parce qu'on n'avait pas ajusté avec un soin suffisant l'horizontalité de sa surface supérieure, mais ce fait n'a nullement gêné le rayonnement.

Dans le cas du cube (Fig. 17) les pointes de rayonnement latéral ont été moins bien enregistrées que la pointe verticale; mais on se rend compte qu'elles sont aussi nettes que celle-ci, bien qu'un peu moins grandes. La directivité est moins bonne que dans le cas du cylindre.

<sup>5</sup> Appareil enregistreur mis au point par MM. CALAORA et LEVAVASSEUR (brevet C.N.R.S.) actuellement construit par la Société Industrielle des Instruments de Précision.

Le rayonnement de la sphère se décompose, comme on le voit sur la Fig. 18, en trois parties. Nous avons vu que ces rayonnements sont déphasés de  $180^\circ$ . Les perturbations sont dues surtout à la difficulté d'enregistrement à ces fréquences; les mouvements d'air et les réflexions parasites ont été très gênantes dans le cas de ce dernier enregistrement.

### 6. Mesure optique des amplitudes de vibration<sup>6</sup> et étalonnage absolu de microphones

L'amplitude des vibrations de la base d'un cylindre vibrant est comprise entre quelques millièmes et quelques dixièmes de millimètre. Pour mesurer des amplitudes aussi petites, sans perturber cette vibration par un contact matériel et sans perturber le champ sonore par la présence d'obstacles de dimensions comparables à celle de la longueur de l'ultra-son émis, nous avons utilisé une nouvelle méthode de mesure optique imaginée par Monsieur P. BARRET. Cette méthode consiste à polir la surface vibrante de façon à obtenir un miroir plan et à placer, au-dessus de cette surface, à très faible distance de celle-ci, un tranchant de lame de rasoir. L'ensemble de ce tranchant et de son image dans le miroir constitue un diaphragme en forme de fente étroite dont la largeur varie lorsque le cylindre vibre.

Pour des mesures relatives, il suffirait d'éclairer vivement cette fente par un faisceau de lumière oblique et de capter la lumière qui la traverse à l'aide d'une cellule photoélectrique. Pour les mesures absolues, on projette, sur un écran, l'image de la fente agrandie par une lentille située hors du faisceau ultra-sonore ou sonore. Dans le cas de faibles amplitudes, au lieu de projeter cette image sur un écran, on l'observe directement à

<sup>6</sup> L'installation de mesure optique de vibration et d'étalonnage de microphones, décrite ci-dessous, a été entièrement réalisée par Monsieur A. CALAORA, d'après les indications de Monsieur DRATZ, Chef de Laboratoire d'Optique du C.R.S.I.M.



l'aide d'un oculaire de microscope (de préférence un oculaire micrométrique). Les mesures sont facilitées par un éclairage stroboscopique obtenu en utilisant, comme source lumineuse, une lampe lumineuse commandée par l'oscillateur qui actionne le cylindre ou le piston vibrant.

Le microphone à étalonner est suspendu au-dessus du cylindre vibrant, dans l'axe de ce dernier. L'étalonnage à fréquence ultra-sonore ne nécessite pas de précautions spéciales, car les ultra-sons dans l'air sont rapidement affaiblis et facilement absorbés par des couvertures de laine; ainsi les réflexions, sur les murs du laboratoire et sur le plafond, provoquent des perturbations peu importantes. Par contre, dans le cas de sons plus graves, il est nécessaire d'opérer à ciel ouvert ou dans une grande chambre sourde. On place le microphone à une certaine distance du cylindre vibrant, pour réduire l'effet des ondes stationnaires. En variant cette distance on peut se rendre compte de la validité de la formule théorique utilisée.

*Calcul de l'intensité acoustique produite par un pistonphone vibrant en un point situé sur l'axe du cylindre*

D'après DAVIS [4], cette intensité est donnée par la formule:

$$I = 2 \rho c \xi_0^2 \sin^2 \frac{k}{2} \sqrt{(r^2 + a^2 - r)_0} \quad (1)$$

Dans le cas d'une distance assez grande ( $r \gg a$ ), cette formule se réduit à:

$$I = 2 \rho c \xi_0^2 \sin^2 \frac{\pi m^2 \lambda}{2 r} \quad (2)$$

Dans ces formules,  $\rho$  est la densité du milieu = 1,205 kg/m<sup>3</sup> dans le cas de l'air à 20°C d'après [5],  $c$  est la vitesse du son = 340 m/s à la température de 20°C, donc  $\rho c = 410$ , c'est la résistivité acoustique de l'air dans les conditions dans lesquelles ces essais sont faits,

$\xi_0$  est l'amplitude de la vitesse du piston. Nous mesurons l'amplitude de la vibration  $\xi$ ,

$$\dot{\xi}_0 = \omega \xi = 2 \pi f \xi,$$

$$k = 2 \pi / \lambda,$$

$r$  est la distance du microphone au piston,

$a$  est le rayon du piston,

$\lambda$  est la longueur d'onde du son,

$$m = a / \lambda.$$

Dans le cas des ultra-sons, des erreurs de mesure appréciables peuvent résulter de la réflexion multiple des sons entre la membrane piston émettrice et le microphone à étalonner. On réduit la cause de ces erreurs, en orientant convenablement le microphone et en le plaçant à une distance suffisante de la source. Une autre cause

d'erreurs qui peut intervenir dans le cas des ultra-sons de fréquence élevée, surtout lorsque l'air ambiant n'est pas parfaitement sec, est l'absorption des ultra-sons par l'air. Mais, en faisant plusieurs mesures, à distances différentes, on peut réduire ces causes d'erreurs.

**Conclusion**

Les émetteurs électrodynamiques à cylindres, sphères ou cubes vibrants, constituent les sources les plus puissantes d'ultra-sons purs (sinusoïdaux) dans l'air. Ils donnent en outre des ondes de forme bien définie (par exemple: planes ou sphériques) convenant particulièrement bien pour les études acoustiques de laboratoire. Par contre ces appareils délicats et nécessitant l'emploi de tensions électriques relativement élevées, ne conviennent guère pour des applications industrielles telles que la précipitation des fumées ou des poussières.

Les nouveaux types d'émetteurs électrodynamiques réalisés au C.R.S.I.M. sont: les émetteurs focalisants (permettant d'obtenir une intensité ultra-sonore très grande en un point), les émetteurs à cube vibrant et à sphère vibrante (ce dernier équivalant à une source ultra-sonore ponctuelle), les émetteurs à piston vibrant.

Parmi les applications de ces nouveaux émetteurs électrodynamiques d'ultra-sons, citons:

1. l'étalonnage absolu de microphones, notamment aux fréquences ultra-sonores,
2. étude architecturale sur maquettes,
3. études sur maquettes d'avions dans les souffleries,
4. étude d'écoute sous-marine sur maquettes,
5. étude de réflexion et de diffusion d'ultra-sons par les surfaces,
6. étude de la propagation des sons autour d'objets de forme géométrique simple et étude des déphasages produits par ces objets.

Remarquons, pour terminer, que tous les appareils décrits dans la présente note ont été entièrement réalisés au Centre de Recherches Scientifiques, Industrielles et Maritimes de Marseille où ils sont actuellement utilisés dans différents laboratoires.

(Reçu le 1<sup>er</sup> juin 1953.)

**Bibliographie**

- [1] ST. CLAIR, H. W., An electromagnetic generator for producing intense high frequency sound. Rev. sci. Instrum. **12** [1941], 250-256.
- [2] GOUBANOV, A. I., Focalisation des ultrasons. J. Technicheskoi Fisiki, U. R. S. S. **19** [1949], 30-33.
- [3] O'NEIL, H. T., Theory of focusing radiators. J. acoust. Soc. Amer. **21** [1949], 516-526.
- [4] DAVIS, A. H., L'acoustique moderne. Éd. Dunod, Paris 1936, p. 76.
- [5] «Hütte», Manuel de l'ingénieur. 1925, Vol. I, p. 797.

# DIE BESTIMMUNG GROSSER MECHANISCHER EINGANGSIMPEDANZEN FESTER KÖRPER IM FREQUENZBAND 50...3000 Hz

von W. ELLING

III. Physikalisches Institut der Universität Göttingen

## Zusammenfassung

Mit dem in dieser Arbeit beschriebenen elektromechanischen Vibrometer wurde im Frequenzbereich 50...3000 Hz die mechanische Eingangsimpedanz von Wänden, Decken und homogenen Aluminiumplatten nach Betrag und Phase ermittelt. Die meßbaren Beträge umfassen einen Bereich von etwa  $10^4 \cdots 10^9 \text{ dyn} \cdot \text{s/cm}$  ( $10 \cdots 10^6 \text{ Ns/m}$ ). Die Messungen zeigen, daß der Imaginärteil der Impedanz von Decken und Wänden bei tiefen Frequenzen ein Massenwiderstand und bei hohen Frequenzen ein Federungswiderstand ist. Der Übergang erfolgt im Frequenzgebiet von 150...300 Hz, in dem der Realteil der Impedanz ein Maximum hat. Modellmessungen an Aluminiumplatten mit hoher Randdämpfung zeigen bei hohen Frequenzen eine gute Übereinstimmung mit der Theorie.

## Summary

With the electromechanical vibrometer described in this article the mechanical impedance of walls, ceilings and homogeneous aluminium plates in absolute value and phase has been determined. The measured values cover a range of about  $10^4 \cdots 10^9 \text{ dyne} \cdot \text{s/cm}$  ( $10 \cdots 10^6 \text{ Ns/m}$ ). The measurements show that the imaginary part of the impedance of ceilings and walls is an inductance at low frequencies and a stiffness at high frequencies. The change-over occurs round about 150...300 c/s, where the real part of the impedance has a maximum. Model measurements on aluminium plates highly damped at the edges agree well at high frequencies with theory.

## Sommaire

On a déterminé, au moyen du vibromètre électromécanique décrit dans le présent travail, l'impédance mécanique d'entrée de murs, plafonds et plaques d'aluminium homogènes dans la gamme de fréquence 50...3000 Hz (mesures en amplitude et en phase). Les amplitudes mesurables s'étendent environ de  $10^4 \cdots 10^9 \text{ dyne s/cm}$  ( $10 \cdots 10^6 \text{ Ns/m}$ ). Les résultats obtenus montrent que la partie imaginaire de l'impédance des plafonds et murs est une résistance d'inertie aux basses fréquences, et une résistance élastique aux fréquences élevées. La transition a lieu dans la gamme 150...300 Hz, dans laquelle la partie réelle de l'impédance est maxima. Les mesures faites sur des maquettes en plaques d'aluminium ayant un grand amortissement aux bords conduisent à un bon accord, aux fréquences élevées, avec la théorie.

## 1. Einleitung

Wirkt auf einen Festkörper eine Wechselkraft ein, so ergibt sich je nach seiner Beschaffenheit eine Schnelle bestimmter Größe und Phasenlage. Die mechanische Eingangsimpedanz, definiert als das komplexe Verhältnis von einwirkender Kraft zu resultierender Schnelle, ist für einen Festkörper charakteristisch. Sie nimmt im allgemeinen je nach Frequenz verschiedene Werte an und hängt nur beim ideal starren Körper, der eine reine Masse darstellt, nicht vom Ort ab. Die Definition der Impedanz schließt eine punktförmige Anregung ein, d. h. die Verbindungsstelle zwischen Meßgerät und Meßobjekt muß in geometrischer Hinsicht klein gegen alle auftretenden Wellenlängen sein.

## 2. Meßverfahren

Für die Bestimmung einer mechanischen Impedanz gibt es verschiedene Meßverfahren [1], [2].

Es wurde die Methode ausgewählt, bei der das Meßobjekt mit konstanter Wechselkraft ange-regt und die Schnelle gemessen wird. Der in Abb. 1 gezeigte Schnitt durch den Impedanzmesser läßt einen an Blattfedern aufgehängten, frei beweglichen Permanentmagneten erkennen (die Eigenfrequenz dieses Masse-Feder-Systems beträgt 8 Hz). In den Spalt des Magneten ragt die mit der Kopplungsmasse fest verbundene Tauchspule. Fließt durch die Spule ein Wechselstrom, so wird die Kraft zwischen dieser und dem Magneten über die Kopplungsmasse auf das Meßobjekt übertragen. Der mechanische Innenwiderstand des Vibrometers ist bei der hier vorliegenden tiefen Abstimmung von Magnet und Blattfedern durch die Kopplungsmasse gegeben. Da das Vibrometer die Summe der Impedanzen von Kopplungsmasse und Meßobjekt mißt, ist es zweckmäßig, den Innenwiderstand so klein wie möglich zu machen. Neben der Kraft, die dem Tauchspulenstrom proportional ist, geht in die Impe-



danz die Schnelle ein. Das in die Kopplungsmasse eingebaute piezoelektrische Empfangssystem mißt die Beschleunigung und damit bei bekannter Frequenz die Schnelle. Das Empfangssystem ist hoch abgestimmt (Resonanzfrequenz etwa 4500 Hz) und erzeugt eine der Beschleunigung proportionale Spannung. Der gesamte Impedanzmeßbereich von  $10^4 \dots 10^9$  g/s wird durch zwei Vibrometer gleicher Wirkungsweise, aber verschiedener Größe erfaßt. Das in Abb. 2 gezeigte kleine Vibrometer wird für den Bereich von  $10^4 \dots 10^7$  g/s, das große für den von  $10^6 \dots 10^9$  g/s verwendet.

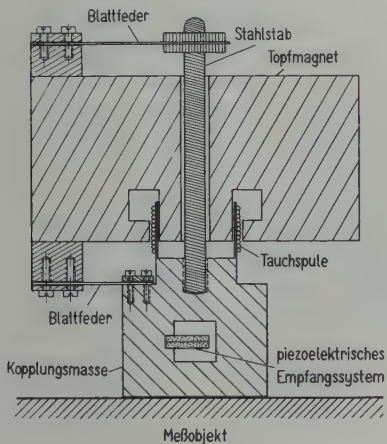


Abb. 1. Schnitt durch den großen Impedanzmesser.



Abb. 2. Blick auf die Unterseite des kleinen und großen Vibrometers.

Die Erzeugung der Kraft und die Messung der Schnelle auf elektromechanischer Basis ermöglichen eine elektrische Messung der Impedanz. Es werden hierzu die elektromechanischen Kopplungskonstanten zwischen Kraft und Strom ( $\alpha$ ) einerseits und zwischen Beschleunigung und Spannung des Empfängers ( $\beta$ ) andererseits auf mehrere Arten als Funktion der Frequenz bestimmt.

Zunächst wird das Vibrometer mit waagrecht gerichtetem Stahlstab auf eine federnde Unterlage gesetzt und mit einem Mikroskop die Amplitude für Frequenzen bis etwa 100 Hz bestimmt. Bei bekannter Frequenz und Kopplungsmasse läßt sich damit die Kraft ermitteln, und es ergibt sich mit dem bekannten Tauchspulenstrom die Kopplungskonstante des Senders. Die Beschleunigung folgt aus Frequenz und Amplitude und ergibt mit der gemessenen Spannung des piezoelektrischen Systems die empfangsseitige Kopplungskonstante.

Des weiteren wurden Sender- und Empfängerempfindlichkeit mit einer Reziprozitätseichung bestimmt [3]. Die Aufstellung des Vibrometers ist dieselbe wie die bei der Eichung mit dem Mikroskop. Das benötigte reversible System besteht hier aus Tauchspule und Magnet. In der ersten Meßreihe werden Tauchspulenstrom und Spannung des Beschleunigungsmessers als Funktion der Frequenz ermittelt. Zur Durchführung der zweiten Meßreihe wird die Kopplungsmasse durch ein Fremdsystem zu Schwingungen angeregt und die Spannung an der Spule und dem Empfänger gemessen. Aus diesen Werten errechnet man sowohl  $\alpha$  als auch  $\beta$ .

Zur Ausmessung der im weiteren Verlauf der Arbeit beschriebenen Impedanzkurven wird eine sogenannte Nullkompensationsmethode verwendet. Der Tauchspulenstrom durchfließt einen ohmschen Widerstand  $R$ . Die an  $R$  abfallende Spannung wird mit einer elektrischen Apparatur abgeschwächt, in der Phase variiert und mit der Spannung des Beschleunigungsmessers zusammengegeben. Ein Anzeigegerät läßt erkennen, wenn sich die Spannungen aufheben. Das Verhältnis der Beträge der beiden Spannungen ist über die Größe  $\alpha\beta/R$  mit dem Betrag der Impedanz verkoppelt, ihr Phasenwinkel ist der Winkel der Impedanz. Mit Hilfe der Eichung der elektrischen Apparatur und der bekannten Kopplungsmasse bestimmt man  $\alpha\beta/R$ .

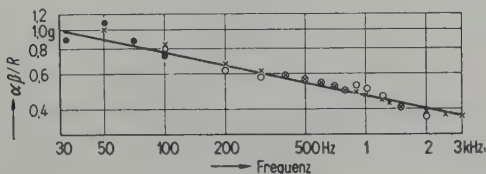


Abb. 3. Zusammenfassende Darstellung aller Eichungen;  
 $\times$  Eichung mit bekannter Masse,  
 $\circ$  Reziprozitätseichung,  
 $\bullet$  Mikroskopeichung.

In Abb. 3 sind die Ergebnisse der oben beschriebenen Eichungen zusammengefaßt.

### 3. Impedanzmessungen an einfachen Objekten

Der reine Massenwiderstand ist am einfachsten zu realisieren. In Abb. 4 sind für drei verschiedene Massen die Impedanzkurven dargestellt. Über der logarithmisch geteilten Frequenzskala ist der Betrag der Impedanz  $\omega m$  ( $\omega$  = Kreisfrequenz,  $m$  = Masse) eingezeichnet. Die ausgezogenen Kurven wurden errechnet.

Die nächsten Messungen wurden an einem freischwingenden Eisenbalken durchgeführt (Länge

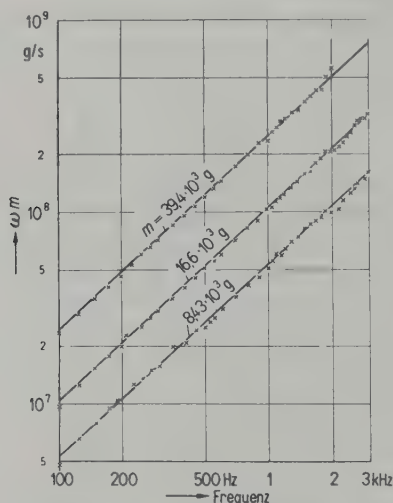


Abb. 4. Mechanische Impedanzen verschiedener Massen; ————— gerechnet,  $\times \times \times$  Meßwerte.

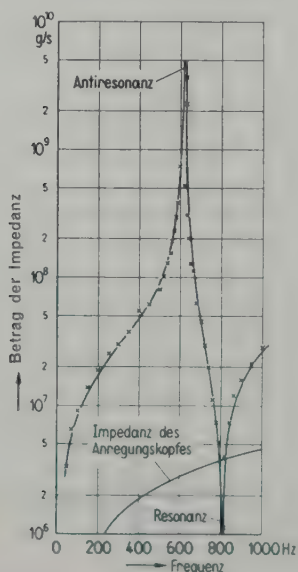


Abb. 5. Mechanische Impedanz eines nahezu ungedämpften Schienenstücks; ————— gerechnet,  $\times \times \times$  Meßwerte.

= 1 m). Abb. 5 zeigt die Ergebnisse bei sehr kleiner Dämpfung, Abb. 6 bei Vorhandensein von Reibungsverlusten. In beiden Fällen wurde der Impedanzmesser mit Zahnarztzement auf das Balkenende aufgekittet.

In Abb. 5 ist der Betrag der Impedanz im logarithmischen Maßstab aufgetragen, um die außerordentlich große Resonanzüberhöhung zu zeigen. Die eingezeichnete Kurve hat bei 620 Hz eine Unendlichkeitsstelle und bei 805 Hz eine Nullstelle. Erstere wird hier mit Antiresonanz, letztere mit Resonanz bezeichnet. Zum Vergleich ist in Abb. 5 der Widerstandsbetrag der Kopplungsmasse (im Bild mit Anregungskopf bezeichnet) eingetragen. Bei größeren Dämpfungen, z. B. durch Sand, ändert sich die Impedanz nicht mehr so stark wie bei sehr kleinen Dämpfungen. Der qualitative Verlauf des Imaginärteils ist beim gedämpften Balken derselbe wie beim ungedämpften. Die Meßergebnisse sind in Abb. 6 dargestellt, und zwar sind Real- und Imaginärteil über der Frequenzskala linear aufgetragen. Positive Werte des Imaginärteils entsprechen einem Massenwiderstand, negative Werte einem Federungs-widerstand. Abb. 6 zeigt den Kurvenverlauf in der Nähe der Antiresonanz (630 Hz) und der Resonanz (850 Hz). Über 1000 Hz wiederholt sich dieses Bild für jede der Oberschwingungen.

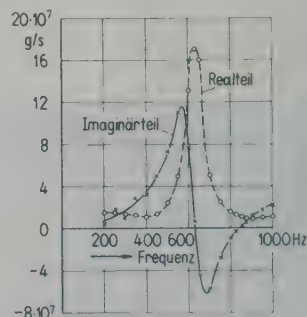


Abb. 6. Mechanische Impedanz eines mit Sand bedämpften Schienenstücks.

Des weiteren wurden Aluminiumplatten mit dem kleinen Vibrometer in der Mitte zu Biegeschwingungen angeregt. Die Impedanzkurven einer an ihren Rändern gedämpften Platte mit den Ausmaßen von  $50 \times 50 \times 0,65 \text{ cm}^3$  sind in Abb. 7 eingetragen. Mit steigender Frequenz treten wie beim Balken abwechselnd Antiresonanzen und Resonanzen auf.

Ein interessanter Spezialfall ist die unendlich ausgedehnte, homogene Platte, die durch Randbedämpfung einer endlichen Platte mehr oder weniger gut realisiert werden kann. Für eine un-



endlich ausgedehnte Platte, deren Dicke klein gegen die Biegewellenlänge ist, haben CREMER [4] und JONES [5] die Eingangsimpedanz berechnet; es ist:

$$Z_0 = \frac{4}{\sqrt{3}} c_L \varrho h^2$$

( $Z_0$ =mechanische Eingangsimpedanz,  $\varrho$ =Dichte,  $c_L$ =Longitudinalwellengeschwindigkeit,  $h$ =Dicke der Platte).

$Z_0$  ist reell und frequenzunabhängig. Abb. 8 zeigt die Impedanzkurven einer  $240 \times 97 \times 0,3 \text{ cm}^3$  großen Aluminiumplatte, deren Ränder bei 1000 Hz mit einer Breite von mehreren Biegewellenlängen in Sand eingebettet sind. Bei hohen Frequenzen stimmen die Meßwerte gut mit dem theoretisch ermittelten  $Z_0$ -Wert überein.

4. Impedanzkurven von Decken und Wänden

Mit dem großen Impedanzmesser wurden Decken und Wände mit den Dicken 12 cm ( $1/2$ -Stein Vollziegelwand, beiderseits verputzt) und 25 cm ( $1/1$ -Stein Vollziegelwand, beiderseits verputzt) untersucht. Bei beiden Wänden wurde die Anregung auf zwei Arten vorgenommen, nämlich erstens durch Aufkitten des Vibrometers auf den Putz und zweitens über einen Zementdübel von 10 cm Länge und 7 cm Durchmesser. Die Decken wurden mit und ohne Linoleumbelag ausgemessen.

Zunächst könnte man einen Impedanzverlauf vermuten, der dem der Abb. 7 entspricht; denn bei tiefen Frequenzen kann man die Wand als annähernd homogene, schwingende Platte ansehen, die an ihren Rändern in bestimmter Weise eingespannt ist. Die gemessenen Impedanzkurven, die in den Abb. 9...15 dargestellt sind, sehen jedoch anders aus. Im Prinzip zeigen sie alle denselben Verlauf: Die Imaginärteile beginnen mit Massenwiderständen, durchlaufen im Frequenzbereich 150...300 Hz die Nullachse und gehen zu Federungswiderständen über. Die Realteile haben im obengenannten Frequenzbereich ihre Maxima. Diesem allgemeinen Verlauf überlagern sich zahl-

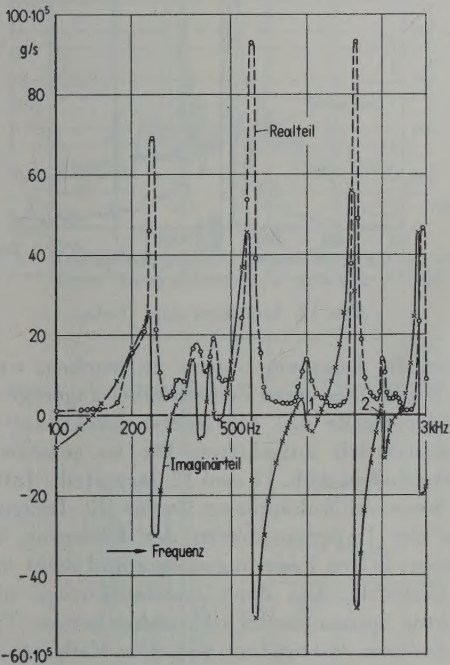


Abb. 7. Mechanische Impedanz einer Aluminiumplatte mit schwach bedämpften Rändern ( $50 \times 50 \times 0,65 \text{ cm}^3$ ).

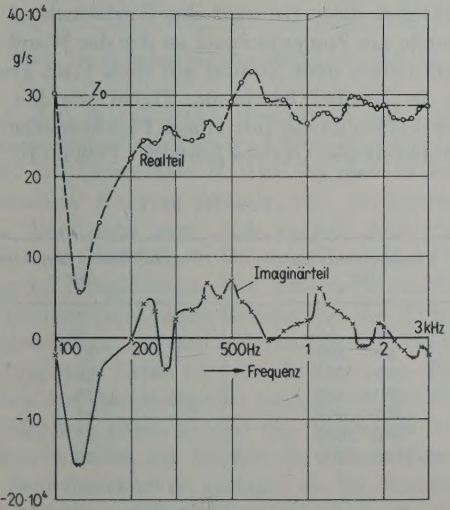


Abb. 8. Mechanische Impedanz einer Aluminiumplatte mit stark bedämpften Rändern ( $240 \times 97 \times 0,3 \text{ cm}^3$ ).

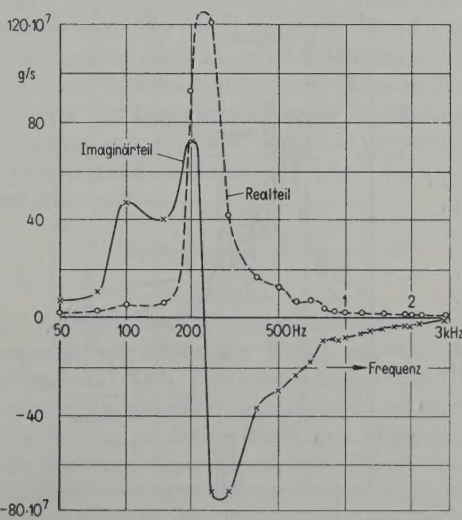


Abb. 9. Impedanz einer über Putz gemessenen Wand (Wandstärke 25 cm).

reiche Spitzen. Bei sehr tiefen Frequenzen unterhalb der Grundresonanz stellt die Wand infolge ihrer Einspannung an den Rändern einen Federungswiderstand dar; die Grundresonanz liegt jedoch unterhalb des Frequenzmeßbereichs.

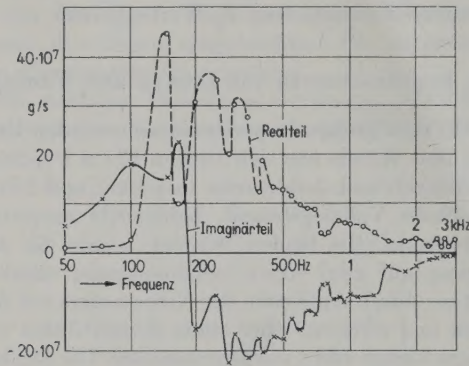


Abb. 10. Impedanz einer Decke mit Linoleumbelag.

Der eben beschriebene Verlauf der Imaginärteil-Kurven ist bei loser Ankopplung des Senders an das Meßobjekt besonders stark ausgeprägt. Lose Ankopplung bedeutet hier Anregung über Putz oder Linoleum. So sind z. B. in Abb. 9 und 10 die Impedanzkurven einer über Putz gemessenen Wand und einer mit Linoleumbelag versehenen Decke wiedergegeben. Die überlagerten Spitzen, die offensichtlich auf Biegeresonanzen zurückzuführen sind, treten fast gar nicht in Erscheinung. Der oberhalb 250 Hz auftretende Federungswiderstand des Imaginärteils legt die Vermutung nahe, daß der Putz, bzw. das Linoleum, zwischen Vibrometer und Wand oder

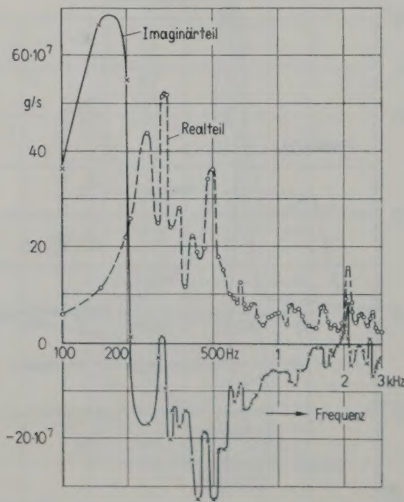


Abb. 11. Impedanz einer Wand mit einzementierter Anregungsstelle (Wandstärke 25 cm).

Decke eine elastische Schicht darstellt; sie hat einen wesentlichen Einfluß auf die Impedanzkurven.

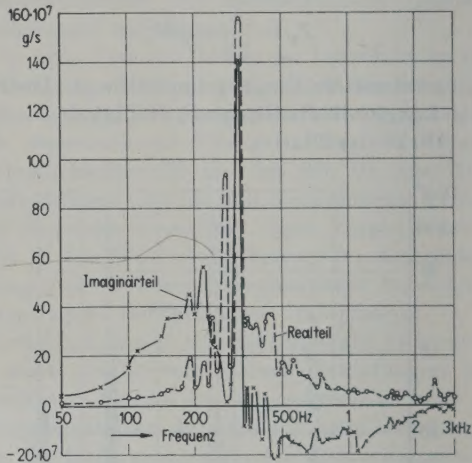


Abb. 12. Impedanz einer Decke.

Um die Kopplung starrer zu machen, wurde die Wand über einen Zementdübel angeregt und bei der Decke das Vibrometer direkt auf den Zementstrich aufgekittet. Die so gemessenen Werte sind in Abb. 11 und 12 dargestellt. Infolge der besseren Ankopplung ist für die Imaginärteile der Impedanzkurven der Übergang vom Massen- in den Federungswiderstand nicht mehr so eindeutig. Die den Impedanzkurven überlagerten Spitzen treten viel stärker hervor. Trotz der festeren Ankopplung zwischen Meßgerät und Objekt bleibt der prinzipielle Verlauf der Kurven erhalten, und es ist auch hier eine federnde Zwischenschicht wirksam. Die folgenden Messungen bestätigen dies. Es wird das Verhältnis *A* der Schnelle am Zementstößel zu der der Wand (ca. 10 cm neben dem Stößel auf dem Putz gemessen) in Dezibel bestimmt. Dabei wurden aus einer Aufzeichnung mit einem Pegelschreiber die Mittelwerte pro Oktave gebildet (Tabelle I).

Tabelle I

Frequenzbereich Hz	Pegeldifferenz der Schnelle dB
25... 50	5
50... 100	13
100... 200	20
200... 400	25
400... 800	31
800... 1600	31
1600... 3200	35

Nur bei tiefen Frequenzen haben Kopplungsmasse und Wand annähernd dieselbe Schnelle.



Mit steigender Frequenz nimmt die Schnelle der Wand im Vergleich zu der der Kopplungsmasse in zunehmendem Maße ab. Man muß daraus auf eine zwischen Vibrometer und Meßobjekt wirksame Federung schließen.

In den Abb. 13...15 sind die Impedanzkurven einer 12 cm dicken Wand dargestellt. Auch hier

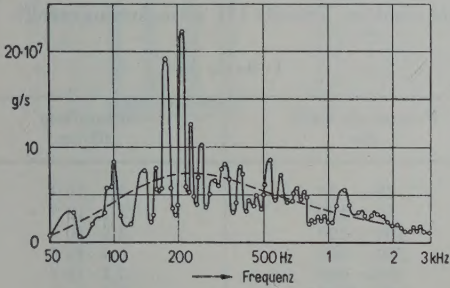


Abb. 13. Realteil der Impedanz einer Wand mit einzementierter Anregungsstelle (Wandstärke 12 cm).

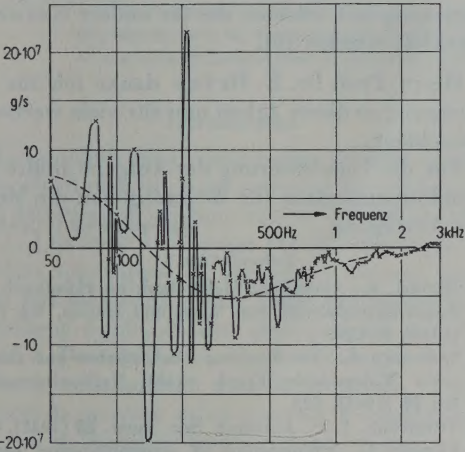


Abb. 14. Imaginärteil zum Realteil in Abb. 13.

geht der Imaginärteil, beginnend mit einem Massenwiderstand, in einen Federungswiderstand über. Die gestrichelt in Abb. 13 und 14 eingezeichneten Kurven (Mittelwerte) verdeutlichen dies. Vergleicht man Abb. 14 mit Abb. 15, so sieht man, daß bei der dünnen Wand der Übergang des Imaginärteils vom Massen- in den Federungswiderstand wenig von der Art der Ankopplung abhängt; auf der anderen Seite ist bei loser Ankopplung (Abb. 15) der Einfluß der Biege- wellen auf das Meßgerät geringer als bei fester Ankopplung (Abb. 13 und 14). Weiterhin ist bei dicken Wänden der Einfluß der Biege- wellen auf die Impedanzkurven geringer als bei dünnen.

Aus den angeführten Beispielen kann man entnehmen, daß in jedem Fall zwischen Vibrometer

und Meßobjekt eine Federung wirksam ist. Dieser Federung ist es zuzuschreiben, daß mit steigen- der Frequenz die Real- und Imaginärteile sämtlicher Impedanzkurven gegen Null gehen. Wäre die Ankopplung an die Wand vollkommen starr, so ginge zwar der Imaginärteil einer Impedanz- kurve gegen Null, der Realteil strebte aber einem konstanten Wert zu, wie es z. B. in Abb. 8 der Fall ist (das gilt bei der Wand natürlich nur für den Frequenzbereich, in dem noch keine Dicken- schwingungen auftreten können). Im Fall einer 12 cm-Ziegelwand müßte bei hohen Frequenzen der Realteil dem Wert  $12 \cdot 10^7$  g/s im Fall einer 25 cm-Wand dem Wert von  $55 \cdot 10^7$  g/s zu- streben.

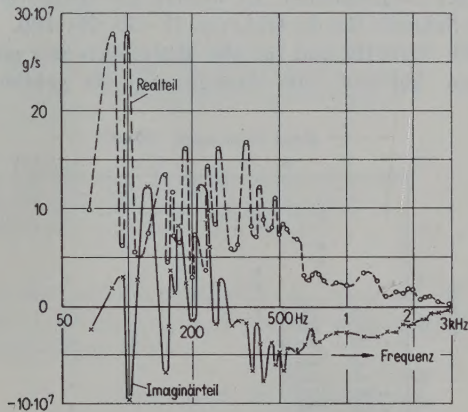


Abb. 15. Impedanz einer über Putz gemessenen Wand (Wandstärke 12 cm).

Die folgenden Messungen dienten dem Nach- weis, daß die den Impedanzkurven überlagerten Spitzen auf Biegeresonanzen der Wand zurück- zuführen sind. Für die 12 cm dicke Wand (Impe- danzkurven in Abb. 13 und 14) wurden bei ver- schiedenen Resonanzfrequenzen (kenntlich am Minimum des Impedanzbetrages) Wellenlängen- messungen durchgeführt und mit gerechneten Werten verglichen, die aus der folgenden Formel ermittelt wurden:

$$\lambda_B = \sqrt{\frac{2 \pi c_L h}{\sqrt{12} \sqrt{1 - \sigma \nu}}}$$

( $c_L$  = Longitudinalwellengeschwindigkeit,  $\nu$  = Frequenz,  $h$  = Dicke der Wand,  $\sigma$  = Querkon- traktionszahl,  $\lambda_B$  = Biegewellenlänge). Die Über- einstimmung zwischen gemessenen und gerech- neten Werten ist hinreichend gut (Tabelle II).

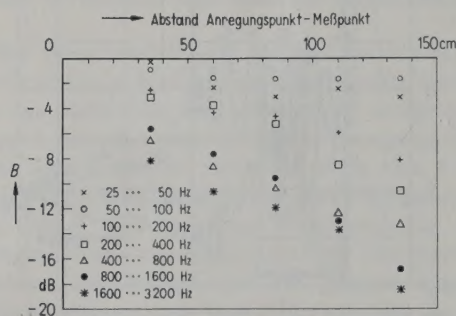
An derselben Wand wurde die Schnelle in Ab- hängigkeit vom dem Abstand vom Anregungs- punkt untersucht. Die Wand wird dazu mit kon- stanter Kraft über den Zementdübel angeregt;



Tabelle II

Frequenz Hz	$\lambda_B$ , gemessen $\cdot 10^2$ cm	$\lambda_B$ , gerechnet $\cdot 10^2$ cm
117	2,14	1,93
160	2,05	1,79
192	1,45	1,63
225	1,58	1,51
240	1,48	1,46
270	1,54	1,37
305	1,08	1,29
360	1,18	1,19
480	0,99	1,03

die Schnelle wird mit einem Beschleunigungsempfänger gemessen und mittels eines Pegelschreibers für Frequenzen von 25...3200 Hz an jedem Meßpunkt aufgezeichnet. Es werden die Mittelwerte der Schnelle für die Oktaven 25...50, 50...100, ..., 1600...3200 Hz und für alle Meßpunkte mit gleichem Abstand vom Anregungspunkt gebildet.

Abb. 16. Verteilung der Schnelle bei einer  $\frac{1}{2}$ -Stein-Ziegelwand.

Zweckmäßigerweise bezieht man die in 35, 60, 85, 110 und 135 cm Entfernung vom Anregungspunkt gemessenen Werte auf diejenigen in 10 cm Abstand. Dieser Meßpunkt liegt nicht mehr auf dem Zementdübel. Das so definierte Verhältnis  $B$  ist ein Maß für die Abnahme der Wandschnelle mit der Entfernung und wird für je eine Oktave gebildet; es ist in Abb. 16 in Dezibel aufgetragen.

Für tiefe Frequenzen ist die Abnahme der Schnelle (die Werte der ersten Oktave streuen infolge Meßungenauigkeit) mit der Entfernung sehr klein; mit wachsender Frequenz erfolgt sie schneller.

Aus den Meßpunkten der Abb. 16 ergibt sich für je eine Oktave die Dämpfung der Schnelle (bzw. Amplitude) in dB/cm. Die Dämpfungswerte sind in Tabelle III zusammengestellt.

Tabelle III

Frequenzbereich Hz	Dämpfung dB/cm
25... 50	$0,7 \cdot 10^{-2}$
50... 100	$1,2 \cdot 10^{-2}$
100... 200	$4,0 \cdot 10^{-2}$
200... 400	$6,4 \cdot 10^{-2}$
400... 800	$7,1 \cdot 10^{-2}$
800...1600	$8,5 \cdot 10^{-2}$
1600...3200	$9,7 \cdot 10^{-2}$

Diese Dämpfungswerte stehen in guter Übereinstimmung mit solchen, die für andere Bauwerke ermittelt wurden [6].

Herrn Prof. Dr. E. MEYER danke ich für die Anregung zu dieser Arbeit und für viele wertvolle Ratschläge.

Für die Durchführung der Aufgabe stellte das Bundesministerium für Wohnungsbau die Mittel zur Verfügung.

(Eingegangen am 14. Juli 1953.)

## Schrifttum

- [1] MEYER, E., Akustische Meßtechnik im Handbuch der Experimentalphysik von Wien und Harms, Bd. 17/2, [1934], S. 149.
- [2] SCHUSTER, K., Die Messung mechanischer und akustischer Widerstände. *Ergeb. exakt. Naturwissenschaften* **21** [1945], 323.
- [3] THOMPSON, S. P., *J. acoust. Soc. Amer.* **20** [1948], 637.
- [4] CREMER, L., Propagation of structure-borne sound. Department of Scientific and Industrial Research, Sponsored Research (Germany), Report No. I (Series B), 1950.
- [5] JONES, R. C., *J. acoust. Soc. Amer.* **17** [1946], 334.
- [6] KÜHL, W. und KAISER, H., *Acustica* **2** [1952], 179.

## MEETING FOR TONE-CONTROL MANAGERS (TONMEISTERTAGUNG)

(held in consultation with the International Commission on Acoustics)

The Northwest German Academy of Music intends to hold another meeting for tone-control managers in Detmold from 6th to 9th October 1954. The object will be as in similar meetings held in the autumn of 1949 and 1951 to discuss all artistic and technical problems of electro-acoustic pick-up and reproduction. The audience

will be divided into two groups to cover respectively the philosophy, science and psychology of music and the physical and technical aspects of music.

The principal technical discussion is to be on stereo-phony in film and broadcasting. Applications from prospective participants are requested by Dr. E. THIENHAUS at the N. W. Academy of Music, Detmold, Germany, by 3rd July. The programme will be published in September.